Cálculo integral

Capítulo 1

Sumas

Reseña HISTÓRICA

Nació en Breselenz, una aldea cercana a Dannenberg en el reino de Hannover, actualmente parte de Alemania.

Fue un matemático que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial, algunas de ellas allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Los escritos de Riemann de 1854 llegaron a ser un clásico en las matemáticas y estos resultados se incorporaron a la teoría de la relatividad y gravitación de Einstein. La cátedra de Gauss en Gottingen fue ocupada por Dirichlet en el año 1855 y después de su muerte por Riemann. En esos tiempos sufrió de tuberculosis y estuvo sus últimos años en Italia en un intento por mejorar su salud.

George Friedrich Bernhard Riemann
(1826-1866)

Definición

La suma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

se representa con el símbolo sigma $\sum$, de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Ejemplo

Determina $\sum_{i=1}^{5} i^2$

Solución

Se sustituye i por los valores de 1 a 5, se eleva cada uno de ellos al cuadrado y se suman los resultados:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

De manera que, $\sum_{i=1}^{5} i^2 = 55$

Propiedades

1. $\sum_{i=a}^{n} k = (n - a + 1)k$
2. $\sum_{i=a}^{n} \left[f(i) + g(i) \right] = \sum_{i=a}^{n} f(i) + \sum_{i=a}^{n} g(i)$
3. $\sum_{i=a}^{n} c\, f(i) = c \sum_{i=a}^{n} f(i)$
4. $\sum_{i=1}^{n} \left[f(i) - f(i-1) \right] = f(n) - f(0)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra $\sum_{i=3}^{7} 8$

Solución

Al aplicar la propiedad correspondiente a una constante, se obtiene:

$$\sum_{i=3}^{7} 8 = (7 - 3 + 1)8 = 40$$

2 Precisa el valor de $\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i)$

Solución

Se aplican las propiedades de las sumas y se determina que:

$$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i) = \sum_{i=1}^{4} i^2 + \sum_{i=1}^{4} 3i = \sum_{i=1}^{4} i^2 + 3\sum_{i=1}^{4} i$$

Se desarrollan,

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 30; \; 3\sum_{i=1}^{4} i = 3\,(1 + 2 + 3 + 4) = 3(10) = 30$$

Finalmente tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{4} (i^2 + 3i) = 30 + 30 = 60$$

3 Calcula el valor de $\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right)$

Solución

Al aplicar las propiedades de las sumas, se determina:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right) = \sum_{n=0}^{5}2n^3-\sum_{n=0}^{5}\frac{2}{3}n+\sum_{n=0}^{5}7 = 2\sum_{n=0}^{5}n^3-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n+\sum_{n=0}^{5}7$$

Se desarrollan las sumas,

$$2\sum_{n=0}^{5}n^3 = 2[(0)^3+(1)^3+(2)^3+(3)^3+(4)^3+(5)^3] = 450;$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{5}n = -\frac{2}{3}(0+1+2+3+4+5) = -\frac{2}{3}(15) = -10;$$

$$\sum_{n=0}^{5}7 = 7(5-0+1) = 7(6) = 42$$

Por tanto, se precisa que:

$$\sum_{n=0}^{5}\left(2n^3-\frac{2}{3}n+7\right) = 450-10+42 = 482$$

4 Determina el valor de $\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c)$

Solución

Al aplicar las propiedades de las sumas se encuentra que:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c) = \sum_{i=6}^{8}3ai^2+\sum_{i=6}^{8}12b\,i-\sum_{i=6}^{8}3c = 3a\sum_{i=6}^{8}i^2+12b\sum_{i=6}^{8}i-\sum_{i=6}^{8}3c$$

Se desarrollan las sumas,

$$3a\sum_{i=6}^{8}i^2 = (3a)[(6)^2+(7)^2+(8)^2] = (3a)(149) = 447a;$$

$$12b\sum_{i=6}^{8}i = (12b)(6+7+8) = (12b)(21) = 252b; \quad \sum_{i=6}^{8}3c = (3c)(8-6+1) = (3c)(3) = 9c$$

Finalmente el resultado es:

$$\sum_{i=6}^{8}(3ai^2+12bi-3c) = 447a+252b-9c$$

EJERCICIO 1

Realiza las siguientes sumas:

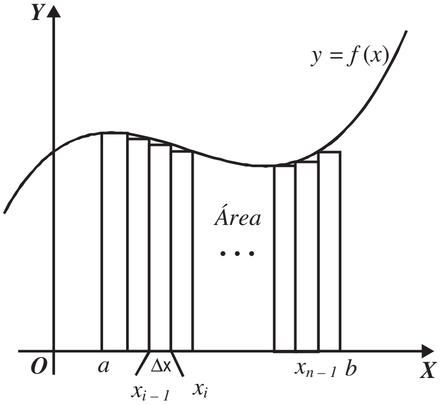
1. $\sum_{i=1}^{4} i^4$
2. $\sum_{i=2}^{6} (4-3i)$
3. $\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{2-i}{4}\right)$
4. $\sum_{n=3}^{8} \left(\frac{2}{n-1}\right)$
5. $\sum_{i=1}^{7} (3i-2)^3$
6. $\sum_{n=2}^{4} (n^2-4)$
7. $\sum_{i=4}^{10} \left(\frac{i-i^2}{3}\right)$
8. $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{ai+b}{2a}\right)$
9. $\sum_{n=2}^{4} (3n^2-5n+7)$
10. $\sum_{n=1}^{5} \frac{n(n+1)}{n+2}$
11. $\sum_{n=3}^{6} (n^3-n)$
12. $\sum_{i=1}^{9} \left(i^2-(i-1)^2\right)$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Suma de Riemann (rectángulos inscritos y circunscritos)

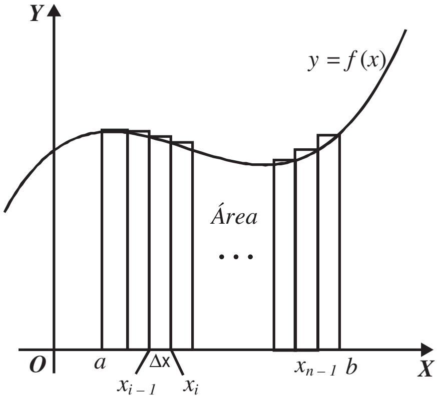
Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$ el área A bajo la gráfica de $f(x)$ en el intervalo dado, se obtiene realizando estimaciones con rectángulos inscritos o circunscritos como se ilustra.

Rectángulos inscritos
sumas inferiores



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a+(i-1)\Delta x)$$

Rectángulos circunscritos
sumas superiores



$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Sumas básicas

1. $\sum_{i=1}^{n} k = kn$

2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$

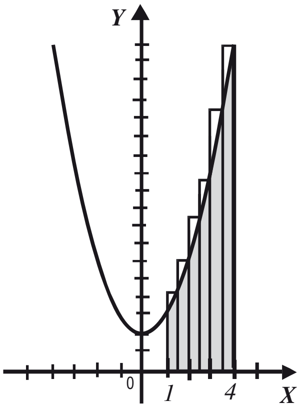
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el área limitada por la curva $f(x) = x^2 + 2$ y el eje x en el intervalo [1, 4]. Utiliza sumas superiores.

Solución

Gráfica



Se sustituye en la fórmula $A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + i\Delta x = 1 + i\left(\frac{3}{n}\right) = 1 + \frac{3i}{n}$$

$$f(a + i\Delta x) = f\left(1+\frac{3i}{n}\right) = \left(1+\frac{3i}{n}\right)^2 + 2$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + \frac{6i}{n} + 3$$

Por consiguiente,

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left(\frac{9i^2}{n^2}+\frac{6i}{n}+3\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27i^2}{n^3}+\frac{18i}{n^2}+\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{27i^2}{n^3}+\sum_{i=1}^{n}\frac{18i}{n^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{9}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right)$$

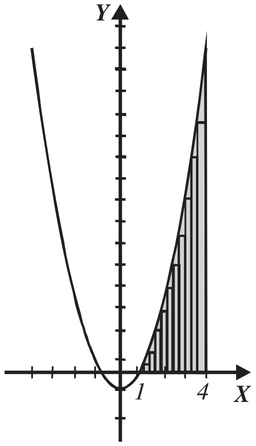
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{18}{n^2}\cdot\frac{n^2+n}{2}+\frac{9}{n}\cdot n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(27+\frac{45}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right) = 27u^2$$

Finalmente, el área es $A = 27u^2$

2 Aplica sumas inferiores para encontrar el área limitada por la curva $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x en el intervalo [1, 4]

Solución



Se aplica la fórmula

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) f(a + (i-1)\Delta x)$$

Donde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$$

$$a + (i-1)\Delta x = 1 + (i-1)\frac{3}{n} = \frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1$$

$$f(a + (i-1)\Delta x) = f\left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right) = \left(\frac{3i}{n} - \frac{3}{n} + 1\right)^2 - 1$$

$$= \frac{9i^2}{n^2} + i\left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right) + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}$$

Al sustituir en la fórmula se obtiene:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{9}{n^2}i^2 + \left(\frac{6}{n} - \frac{18}{n^2}\right)i + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3}i^2 + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)i + \frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{27}{n^3}i^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n}i + \left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\cdot\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + \left(\frac{18}{n^2} - \frac{54}{n^3}\right)\left(\frac{n^2 + n}{2}\right) + n\left(\frac{27}{n^3} - \frac{18}{n^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} + 9 + \frac{9}{n} - \frac{27}{n} - \frac{27}{n^2} + \frac{27}{n^2} - \frac{18}{n}\right]$$

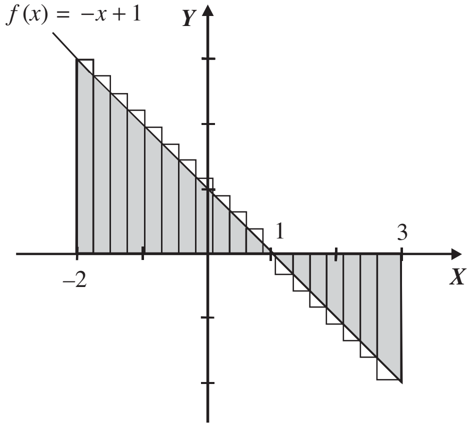
$$= \lim_{n\to\infty}\left[18 - \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right] = 18u^2$$

Por tanto, $A = 18u^2$

3 Determina el área limitada por la recta $f(x) = -x + 1$ y el eje X, mediante sumas superiores en el intervalo $[-2, 3]$

Solución

Al analizar la gráfica, se consideran 2 intervalos $[-2, 1]$ y $[1, 3]$.



Cálculo del área de $[-2, 1]$
Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{3}{n}$

$$f(a+i\Delta x) = -\left(-2+\frac{3i}{n}\right)+1 = -\frac{3i}{n}+3$$

Al sustituir en la fórmula, se obtiene:

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3}{n}\right)\left(-\frac{3i}{n}+3\right) = \frac{9}{2}u^2$$

Se realiza el cálculo del área de $[1, 3]$,
Se aplica la fórmula:

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(a+i\Delta x)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{2}{n}$

$$f(a + i\Delta x) = -\left(1+\frac{2i}{n}\right)+1 = -\frac{2i}{n}$$

Se sustituye en la fórmula y se tiene como resultado:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}\right)\left(-\frac{2i}{n}\right) = -2u^2$$

El signo negativo indica que el área se encuentra por debajo del eje x, pero para efectos del cálculo del área total, se considera su valor absoluto.
Por tanto, el área buscada es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{9}{2}u^2 + 2u^2 = \frac{13}{2}u^2$$

EJERCICIO 2

Emplea sumas superiores para encontrar el área limitada por la curva, el eje X, las rectas dadas o el intervalo indicado.

1. $f(x) = 4x + 5;\ x = 2,\ x = 5$
2. $f(x) = -2x + 6;\ x = 1,\ x = 4$
3. $f(x) = 4 - x^2;\ [-2, 2]$
4. $f(x) = x^3 - 4x;\ [-1, 1]$
5. $f(x) = 2x^2 - 4x + 3;\ x = 0,\ x = 2$

Calcula el área limitada por la curva $f(x)$ y el eje X en el intervalo indicado utilizando sumas inferiores o superiores.

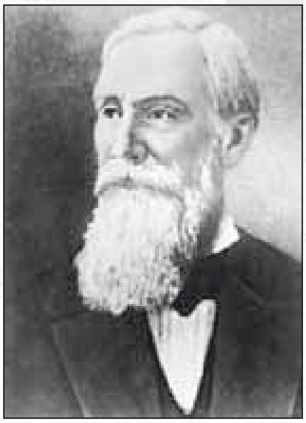
6. $f(x) = \frac{h}{b}x;\ [0, b]$
7. $f(x) = 3 - \frac{1}{3}x^2;\ [-3, 3]$
8. $f(x) = (x - 2)^3 + 1;\ [1, 3]$
9. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x;\ [0, 3]$
10. $f(x) = 5x^4;\ [1, 3]$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 2

Integrales inmediatas

Reseña HISTÓRICA



Matemático ruso conocido por sus trabajos en teoría de aproximación de funciones, geometría diferencial, polinomios ortogonales y probabilidad.

El nombre "Chevichev" es una transliteración del alfabeto cirílico, por lo que a veces se encuentra con grafías diferentes, por ejemplo: Chevyshev, Tchebyshef y otras similares.

Su aportación en matemáticas es notable, debido a sus múltiples aplicaciones tanto en teoría de la aproximación de funciones por polinomios, como en análisis numérico (inversión de matrices, la evaluación numérica de integrales, la integración numérica de ecuaciones diferenciales, o la más precisa aproximación a una función).

Pafnuti Lvovich Chevichev murió el 26 de noviembre de 1894 en San Petersburgo.

Pafnuti Lvovich Chevichev
(1821-1894)

Definición

Si $F(x)$ es una función con derivada $f'(x)$ entonces, $F(x)$ se llama *integral indefinida* o *antiderivada de* $f'(x)$.

La antiderivada de una función no es única.

Ejemplo

$$x^3,\ x^3 + 4,\ x^3 - 1$$

Son todas antiderivadas de $f'(x) = 3x^2$, puesto que todas las antiderivadas de $f'(x)$ quedan incluidas en $F(x) = x^3 + C$, en donde C se llama constante de integración.

Para denotar la integral indefinida de $f'(x)$ se utiliza:

$$\int f'(x)dx$$

Entonces,

$$\int 3x^2dx = x^3 + C$$

Fórmulas

1. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
2. $\int a\,dv = a\int dv$
3. $\int dx = x + C$
4. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ,\ n \neq -1$
5. $\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C\ ,\ n \neq -1$
6. $\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C$
7. $\int a^v\,dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$
8. $\int e^v\,dv = e^v + C$
9. $\int \text{sen}\ v\,dv = -\cos v + C$
10. $\int \cos v\,dv = \text{sen}\ v + C$
11. $\int \sec^2 v\,dv = \tan v + C$
12. $\int \csc^2 v\,dv = -\cot v + C$
13. $\int \sec v \tan v\,dv = \sec v + C$
14. $\int \csc v \cot v\,dv = -\csc v + C$
15. $\int \tan v\,dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$
16. $\int \cot v\,dv = \ln|\text{sen}\ v| + C$
17. $\int \sec v\,dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$
18. $\int \csc v\,dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int x^4dx$

Solución

$$\int x^4dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

2 Encuentra $\int 3ab^2x^4dx$

Solución

$$\int 3ab^2x^4\,dx = 3ab^2\int x^4\,dx = 3ab^2\frac{x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{3ab^2x^5}{5}+C$$

3 ¿Cuál es el resultado de $\int(5x^3+2x^2-6x+3)dx$?

Solución

$$\begin{aligned}\int(5x^3+2x^2-6x+3)dx &= 5\int x^3dx+2\int x^2dx-6\int x\,dx+3\int dx\\ &= 5\frac{x^{3+1}}{3+1}+2\frac{x^{2+1}}{2+1}-6\frac{x^{1+1}}{1+1}+3x+C\\ &= \frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{6}{2}x^2+3x+C\\ &= \frac{5}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-3x^2+3x+C\end{aligned}$$

4 Obtén $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

Solución

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2x^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x}+C$$

5 ¿Cuál es el resultado de $\int-\frac{3\,dx}{x^3}$?

Solución

$$\int-\frac{3\,dx}{x^3}=-3\int\frac{dx}{x^3}=-3\int x^{-3}dx=-3\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+C=\frac{-3x^{-2}}{-2}+C=\frac{3}{2x^2}+C$$

Integrales por cambio de variable

Algunas integrales no se pueden resolver de forma inmediata, entonces se tratará de ser posible transformar la integral a una de las siguientes expresiones

$$\int v^n dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C \qquad \int\frac{dv}{v}=\ln|v|+C$$

En las integrales que se resuelven por cambio de variable, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se identifica la variable.
2. Se obtiene la diferencial de esta variable y se efectúa el despeje de la misma.
3. Se realiza la sustitución correspondiente.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Realiza la siguiente integral:

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx$$

Solución

Se elige, de la siguiente forma, la nueva variable que se va a integrar:

$$v = 2 + x^2 \qquad \rightarrow \qquad dv = 2x\,dx$$

Se realizan las sustituciones y se resuelve la integral para obtener el resultado.

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx = \int (2+x^2)^{\frac{3}{2}}(2x)dx = \int v^{\frac{3}{2}}dv = \frac{v^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C = \frac{v^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+C$$

Por consiguiente,

$$\int 2(2+x^2)^{\frac{3}{2}}x\,dx = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+C$$

2 Determina el resultado de $\int \sqrt{m+nx}\,dx$

Solución

$v = m + nx,\ dv = n dx$ donde $dx = \dfrac{dv}{n}$

Al realizar las sustituciones se genera la integral:

$$\int \sqrt{m+nx}\,dx = \int (m+nx)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{n}\int v^{\frac{1}{2}}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3n}+C = \frac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n}+C$$

Finalmente, $\int \sqrt{m+nx}\,dx = \dfrac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n}+C$

3 Encuentra el resultado de $\int x(2+x^3)^2dx$

Solución

$v = 2 + x^3,\ dv = 3x^2dx$ donde $dx = \dfrac{dv}{3x^2}$

$$\int x(2+x^3)^2dx = \int x\cdot v^2\frac{dv}{3x^2} = \int v^2\frac{dv}{3x}$$

En este ejemplo el cambio de variable no se puede efectuar debido a que la nueva integral tiene dos variables. Entonces, se realiza el producto indicado y se resuelve la integral.

$$\int x(2+x^3)^2dx = \int (4+4x^3+x^6)x\,dx = \int (4x+4x^4+x^7)dx = 2x^2+\frac{4}{5}x^5+\frac{x^8}{8}+C$$

Por consiguiente,

$$\int x(2+x^3)^2dx = 2x^2+\frac{4}{5}x^5+\frac{x^8}{8}+C$$

4 Precisa la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{2+3x}$$

Solución

$v = 2 + 3x, dv = 3dx$ donde $\frac{dv}{3} = dx$

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \int \frac{1}{3}\cdot\frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\ln|v| + C \;=\; \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x| + C$$

5 Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}}$$

Solución

$v = c + ae^{\theta}$, $dv = ae^{\theta}d\theta$ donde, $\frac{dv}{a} = e^{\theta}d\theta$

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}} = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{dv}{v} = \frac{1}{a}\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{a}\ln|v| + C \;=\; \frac{1}{a}\ln|c+ae^{\theta}| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{e^{\theta}d\theta}{c+ae^{\theta}} = \frac{1}{a}\ln|c+ae^{\theta}| + C$$

6 Encuentra la primitiva de

$$\int \frac{\text{sen } 5x}{1-\cos 5x}\,dx$$

Solución

$v = 1 - \cos 5x$, $dv = 5 \text{ sen } 5x\, dx$ donde $\frac{dv}{5} = \text{sen } 5x\, dx$

Se realiza la sustitución:

$$\int \frac{\text{sen } 5x}{1-\cos 5x}\,dx = \int \frac{1}{5}\cdot\frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\int\frac{dv}{v} = \frac{1}{5}\ln|v| + C \;=\; \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{\text{sen } 5x\, dx}{1-\cos 5x} = \frac{1}{5}\ln|1-\cos 5x| + C$$

EJERCICIO 3

Efectúa las siguientes integrales:

1. $\int x^6 dx$
2. $\int 5x^4 dx$
3. $\int bx^3 dx$
4. $\int \sqrt{3}x^2 dx$
5. $\int a\, dx$
6. $\int \frac{3\,dx}{4}$
7. $\int \frac{dx}{3}$
8. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$
9. $\int 5\sqrt[4]{x}\, dx$
10. $\int \frac{dx}{x^3}$
11. $\int \frac{5\,dx}{x^4}$
12. $\int \frac{4\,dx}{x}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$
14. $\int \frac{6\,dx}{\sqrt[3]{x}}$
15. $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$
16. $\int \frac{a\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$
17. $\int \frac{5\,dx}{2x}$
18. $\int \sqrt{bx}\, dx$
19. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}} - 4\sqrt[3]{x}\right)dx$
20. $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x}\right)dx$
21. $\int \sqrt[3]{at}\, dt$
22. $\int \sqrt{6t}\, dt$
23. $\int (8x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 2x - 3)\, dx$
24. $\int (ax^3 - bx^2 - cx + d)dx$
25. $\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{3x}{\sqrt{a}} - 5\sqrt{b}\right) dx$
26. $\int \left(\frac{x^4 - 6x^3 - 7x}{x}\right) dx$
27. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$
28. $\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt[4]{x}}\right) dx$
29. $\int \left(y^{\frac{5}{2}} - 5y^{\frac{4}{3}} - 2y^{\frac{1}{4}} - \sqrt{y}\right) dy$
30. $\int \left(\frac{y^{\frac{7}{2}} - y^{\frac{5}{3}} - y^{\frac{1}{4}}}{y^2}\right) dy$
31. $\int \sqrt[3]{t}(5t^2 - 3t + 2)\, dt$
32. $\int \sqrt[3]{7t}\, dt$
33. $\int (3x + 4)^6 dx$
34. $\int (ax^2 - b)^5 x\, dx$
35. $\int t^2(t^3 - 4)^2 dt$
36. $\int (a - by)^4 dy$
37. $\int (t^2 - 6)^2 dt$
38. $\int x(x + 4)^2 dx$

39. $\int x^2(x+1)^3 dx$

40. $\int \sqrt{m+ny}\, dy$

41. $\int \sqrt{5x-3}\, dx$

42. $\int \frac{t\, dt}{\sqrt{at^2+b}}$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-1}}$

44. $\int \left(\sqrt{x}-4\right)^2 dx$

45. $\int \frac{x\, dx}{(3x^2-4)^4}$

46. $\int \frac{5\, dx}{(3x-4)^2}$

47. $\int \frac{8x\, dx}{(2x^2+5)^4}$

48. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-b\right)^2}{\sqrt{x}} dx$

49. $\int \frac{dt}{at+b}$

50. $\int \frac{x\, dx}{3x^2-4}$

51. $\int \frac{dx}{x+3}$

52. $\int \frac{4x\, dx}{2x^2-6}$

53. $\int \frac{(2x-3)\, dx}{(x^2-3x+6)^2}$

54. $\int (x^2-2)\sqrt{x^3-6x+3}\, dx$

55. $\int \frac{y^{n-1}dy}{(ay^n+b)^m}$

56. $\int e^{3x}(1-e^{3x})^2 dx$

57. $\int \frac{(4-\ln|x+3|)^3 dx}{x+3}$

58. $\int \cos 4x(1-\text{sen}\, 4x)^3 dx$

59. $\int \csc^2 x\sqrt{3+\cot x}\, dx$

60. $\int \frac{\sec 2x \tan 2x}{\sqrt{1-\sec 2x}} dx$

61. $\int \frac{\cos ax}{1-\text{sen}\, ax} dx$

62. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\sqrt{e^{\sqrt{x}}-1}}{\sqrt{x}} dx$

63. $\int \cot x(2+\ln|\text{sen}\, x|)\, dx$

64. $\int \frac{\text{sen}\, 2x\, dx}{(1-\cos^2 x)^3}$

65. $\int \text{sen}^2 bx \cos bx\, dx$

66. $\int \cot mx \csc^2 mx\, dx$

67. $\int \cos^2 4x\, \text{sen}\, 4x\, dx$

68. $\int \frac{\cos 5x}{\sqrt{\text{sen}\, 5x+4}} dx$

69. $\int \frac{4x+2}{x+2} dx$

70. $\int \frac{(3x^2+2)\, dx}{x-1}$

71. $\int \frac{dy}{y \ln^2 y}$

72. $\int \frac{dx}{2x \ln 3x}$

73. $\int x^n\sqrt{ax^{n+1}+b}\, dx$

74. $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\, dx$

75. $\int \csc^2 3x \cos 3x\, dx$

76. $\int \left(\frac{2}{(x+1)^3}-\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{4}{x+1}\right) dx$

77. $\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+5}\right)dx$

78. $\int\left(\frac{3}{2x-1}+\frac{5}{3x-4}\right)dx$

79. $\int\frac{\text{sen } x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx$

80. $\int \text{sen}^3 x \,\text{sen}\, 2x\, dx$

81. $\int\frac{dw}{\text{sen}^2 w\sqrt{1-\cot w}}$

82. $\int\frac{3\,\text{sen } y\cos y}{\sqrt{1-2\,\text{sen}^2 y}}dy$

83. $\int\sqrt{1+\cos\alpha}\, d\alpha$

84. $\int\frac{\text{sen}^{\frac{3}{4}} x}{\cos^{\frac{11}{4}} x}dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de funciones exponenciales

Las siguientes fórmulas se emplean para integrar funciones exponenciales

$$\int a^v dv=\frac{a^v}{\ln a}+C \quad \text{y} \quad \int e^v dv=e^v+C$$

EJEMPLOS

1 Encuentra la integral indefinida de $\int e^{2x}dx$

Solución

Se escoge la variable de acuerdo con la fórmula que se va a emplear, en este caso,

$$v = 2x, \quad \text{su diferencial} \quad dv = 2dx \quad \text{donde,} \quad dx = \frac{dv}{2}$$

Se realiza el cambio de variable y el resultado es,

$$\int e^{2x}dx=\int e^v\frac{dv}{2}=\frac{1}{2}\int e^v dv=\frac{1}{2}e^v+C = \frac{1}{2}e^{2x}+C$$

Finalmente,

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

2 Determina el resultado de $\int e^{\frac{x}{3}}\, dx$

Solución

$v = \frac{x}{3}, \quad dv = \frac{1}{3}dx \quad$ donde, $\quad 3dv = dx$

Por consiguiente, al realizar la sustitución se obtiene:

$$\int e^{\frac{x}{3}}\, dx=3\int e^v\, dv=3e^v+C = 3e^{\frac{x}{3}}+C$$

3 Obtén la función primitiva de $\int a^{nx}dx$

Solución

$v = nx,\ dv = n\,dx$ donde, $\dfrac{dv}{n} = dx$

Se realiza la sustitución,

$$\int a^{nx}dx = \frac{1}{n}\int a^{v}dv = \frac{1}{n}\cdot\frac{a^{v}}{\ln a} + C = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

Por tanto,

$$\int a^{nx}dx = \frac{a^{nx}}{n\ln a} + C$$

4 Encuentra el resultado de $\int \dfrac{dx}{e^{2x}}$

Solución

$v = -2x,\ dv = -2dx$ donde, $\dfrac{dv}{-2} = dx$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}} = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int e^{v}dv = -\frac{1}{2}e^{v} + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C = \frac{1}{2e^{2x}} + C$$

EJERCICIO 4

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int e^{4x}dx$
2. $\int 8e^{\frac{x}{2}}\,dx$
3. $\int e^{ax+b}dx$
4. $\int \dfrac{e^{\sqrt{3x}}dx}{\sqrt{3x}}$
5. $\int \dfrac{e^{8x}}{e^{5x}}\,dx$
6. $\int e^{\cos 4x}\,\text{sen}\,4x\,dx$
7. $\int 2x^{2}e^{x^{3}}dx$
8. $\int b^{4x}dx$
9. $\int 3^{2x}dx$
10. $\int 2^{x}e^{x}dx$
11. $\int \sqrt[3]{e^{x}}\,dx$
12. $\int \sqrt{e^{3x}}\,dx$
13. $\int \dfrac{dx}{5^{4x}}$
14. $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x^{2}}}}{x^{3}}\,dx$
15. $\int \left[\sqrt[3]{e^{x}}\right]^{4}dx$
16. $\int x^{2}(3 - e^{x^{3}})\,dx$
17. $\int (2x-3)e^{x^{2}-3x+1}dx$
18. $\int \dfrac{dt}{\sqrt[5]{e^{2t}}}$

19. $\int e^{\frac{1}{\sec 2x}} \text{sen } 2x\, dx$

20. $\int \frac{t^3 dt}{e^{2t^4}}$

21. $\int 4^x \cdot e^{2x} dx$

22. $\int \left(e^{-\frac{x}{4}} + e^{\frac{x}{2}} \right) dx$

23. $\int (e^{3x} - 2)^2 dx$

24. $\int x \cdot 5^{x^2} dx$

25. $\int (e^{2x} - e^{-2x})^2 dx$

26. $\int e^{\tan 3x} \sec^2 3x\, dx$

27. $\int x^2 5^{x^3} dx$

28. $\int (10^{3x} - 2^x)\, dx$

29. $\int \left(e^{\frac{x}{n}} - a^{\frac{x}{n}} \right) dx$

30. $\int \left(\frac{e^{4x} - 5}{e^{2x}} \right) dx$

31. $\int \left(\frac{1 - e^{ax}}{e^{ax}} \right) dx$

32. $\int \frac{e^{\cos^2 x}}{\csc 2x} dx$

33. $\int \frac{e^{\text{arc sen } 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$

34. $\int \frac{e^{\text{arc tan } x}}{1 + x^2} dx$

35. $\int (3^{2x} + 3^{4x})^2 dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se integran con las siguientes fórmulas y en algunos casos auxiliándose de un cambio de variable.

1. $\int \text{sen } v\, dv = -\cos v + C$
2. $\int \cos v\, dv = \text{sen } v + C$
3. $\int \sec^2 v\, dv = \tan v + C$
4. $\int \csc^2 v\, dv = -\cot v + C$
5. $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + C$
6. $\int \csc v \cot v\, dv = -\csc v + C$
7. $\int \tan v\, dv = -\ln|\cos v| + C = \ln|\sec v| + C$
8. $\int \cot v\, dv = \ln|\text{sen } v| + C$
9. $\int \sec v\, dv = \ln|\sec v + \tan v| + C$
10. $\int \csc v\, dv = \ln|\csc v - \cot v| + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \cos my\, dy$

Solución

Se hace un cambio de variable y se obtiene su diferencial:

$$v = my, \quad dv = mdy, \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{m} = dy$$

Se sustituye y se resuelve la integral:

$$\int \cos my\, dy = \int \cos v \frac{dv}{m} = \frac{1}{m}\int \cos v\, dv = \frac{1}{m}\text{sen } v + C = \frac{1}{m}\text{sen } my + C$$

2 ¿Cuál es el resultado de $\int \sec 7x\, dx$?

Solución

$v = 7x, \quad dv = 7dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{7} = dx$

$$\int \sec 7x\, dx = \frac{1}{7}\int \sec v\, dv = \frac{1}{7}\ln|\sec v + \tan v| + C = \frac{1}{7}\ln|\sec 7x + \tan 7x| + C$$

3 Obtén el resultado de $\int x \cot x^2 dx$

Solución

$v = x^2, \quad dv = 2x\, dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{2} = x\, dx$

Se realiza el cambio de variable y se resuelve la integral:

$$\int x \cot x^2 dx = \int \cot v \frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int \cot v\, dv = \frac{1}{2}\ln|\text{sen } v| + C = \frac{1}{2}\ln|\text{sen } x^2| + C$$

4 Encuentra el resultado de $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

Solución

La fórmula que se va a utilizar es $\int \tan v\, dv = \ln|\sec v| + C$, de manera que:

$$v = \sqrt{x}, \quad dv = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \text{donde,} \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dv$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral:

$$\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \tan v\, dv = 2\ln|\sec v| + C = 2\ln|\sec \sqrt{x}| + C$$

5 Determina $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}dx$

Solución

Antes de resolver esta integral se recomienda emplear identidades trigonométricas.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{2\operatorname{sen} x\cdot\cos^2 x}{\cos x(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)}=\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}$$

$$=\tan 2x$$

Al sustituir la identidad encontrada, se tiene $\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}dx=\int \tan 2x\,dx$, donde:

$$v = 2x,\quad dv = 2dx;\quad dx = \frac{dv}{2}$$

Se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}dx=\int \tan 2x\,dx=\frac{1}{2}\int \tan v\,dv=-\frac{1}{2}\ln|\cos v|+C=-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$$

EJERCICIO 5

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen} 5x\,dx$
2. $\int \cos 6x\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}\frac{x}{4}\,dx$
4. $\int \tan bx\,dx$
5. $\int \sec^2\frac{x}{a}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax}$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 bx}$
8. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$
9. $\int \csc\frac{t}{4}\cot\frac{t}{4}\,dt$
10. $\int x\operatorname{sen} 4x^2dx$
11. $\int x^2\cos\frac{x^3}{5}\,dx$
12. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}dx$
13. $\int \sec ax\tan ax\,dx$
14. $\int 3x\sec^2 4x^2dx$
15. $\int \csc^2(3x-1)dx$
16. $\int \cot(ax-b)dx$
17. $\int \sec ax\,dx$
18. $\int x\csc 4x^2dx$

19. $\int \cot x\sqrt{\csc x}\,dx$

20. $\int (\cot b\theta + \tan b\theta)^2\,d\theta$

21. $\int (\csc 3x - \cot 3x)^2\,dx$

22. $\int (\tan 5x - \sec 5x)^2\,dx$

23. $\int \frac{\text{sen}^3 x}{1-\cos x}\,dx$

24. $\int x\cos(2-x^2)\,dx$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\,x}\,dx$

26. $\int \sqrt{1+\text{sen}\,2x}\,dx$

27. $\int \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\,dx$

28. $\int \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]^{-2} dx$

29. $\int \frac{dw}{\cos^2 w - \cos 2w}$

30. $\int \left(\frac{1+\text{sen}^2 x}{1+\cos 2x}\right)dx$

31. $\int (\cot^2 x + \cot^4 x)\,dx$

32. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{sen}\,x}}\,dx$

33. $\int \frac{dw}{\text{sen}^2 w(1-4\cot w)}$

34. $\int \left(\frac{1-\text{sen}\,x}{1+\text{sen}\,x}\right)dx$

35. $\int \frac{dy}{\text{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)}$

36. $\int \frac{2\tan\alpha\,d\alpha}{\sec^2\alpha - 2\tan^2\alpha}$

37. $\int \frac{\text{sen}\,2\theta}{\sqrt{\text{sen}^2\theta+1}}\,d\theta$

38. $\int e^{2x}\text{sen}(e^{2x})\,dx$

39. $\int \frac{\text{sen}(\ln x^2)}{x}\,dx$

40. $\int \frac{\sqrt{x}\sec\sqrt{x}}{3x}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales con expresiones de la forma

$$\sqrt{v^2 \pm a^2},\ \sqrt{a^2-v^2},\ v^2 \pm a^2,\ a^2-v^2$$

Fórmulas

1. $\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{v}{a} + C$

2. $\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + C$

3. $\int \frac{dv}{a^2-v^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+v}{a-v}\right| + C$

4. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\frac{v}{a} + C$

5. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2\pm a^2}} = \ln\left(v+\sqrt{v^2\pm a^2}\right) + C$

6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc sec}\frac{v}{a} + C$

7. $\int \sqrt{a^2-v^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2} + \frac{a^2}{2}\text{arc sen}\frac{v}{a} + C$

8. $\int \sqrt{v^2\pm a^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(v+\sqrt{v^2\pm a^2}\right) + C$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{dx}{x^2+36}$

Solución

Se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a} + C$$

se deducen las siguientes equivalencias y se sustituyen en la fórmula.

$$v^2 = x^2,\ v = x \text{ y } dv = dx;\ a^2 = 36,\ a = 6$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2+36} = \frac{1}{6}\text{arc tan}\frac{x}{6} + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{16x^2-9}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza la fórmula:

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{v-a}{v+a}\right| + C$$

se determina la variable y se encuentra su diferencial,

$$v^2 = 16x^2,\ v = 4x,\ dv = 4dx \quad \text{y} \quad \frac{dv}{4} = dx;\ a^2 = 9,\ a = 3$$

Finalmente, se realiza la sustitución y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{16x^2-9} = \frac{1}{4}\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + C = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right| + C$$

3 Obtén el resultado de $\int \frac{m}{n^2x^2-p^2}\,dx$

Solución

$$a^2 = p^2,\ a = p \quad v^2 = n^2x^2;\ v = nx, dv = ndx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{n} = dx$$

Se sustituye y se resuelve la integral,

$$\int \frac{mdx}{n^2x^2-p^2} = \frac{m}{n}\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2(p)}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C = \frac{m}{2np}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C$$

Se concluye que,

$$\int \frac{mdx}{n^2x^2-p^2} = \frac{m}{2np}\ln\left|\frac{nx-p}{nx+p}\right| + C$$

4 Precisa el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\,\frac{v}{a}+C$$

se deduce a, v y la diferencial dv

$$a^2=9,\ a=3;\ v^2=25x^2,\ v=5x,\ dv=5\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{5}=dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{v}{a}+C = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{5x}{3}+C$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \frac{1}{5}\text{arc sen}\,\frac{5x}{3}+C$$

5 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}}$

Solución

$$a^2=5,\ a=\sqrt{5};\ v^2=9x^2,\ v=3x,\ dv=3\,dx \quad \text{donde,} \quad \frac{dv}{3}=dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+5}} = \int \frac{\frac{dv}{3}}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+5}\right|+C$$

EJERCICIO 6

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^2+81}$
2. $\int \frac{dy}{by^2+b^3}$
3. $\int \frac{dy}{y^2-16}$
4. $\int \frac{dx}{25-4x^2}$
5. $\int \frac{dx}{2x^2-16}$
6. $\int \frac{dx}{9x^2-144}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-7}}$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8}}$

11. $\int \frac{4\,dx}{b^4x^2+m^2}$

12. $\int \frac{2v\,dv}{v^4-b^4}$

13. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+4)}$

14. $\int \frac{dx}{\sec x(1-\text{sen}^2 x)}$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$

16. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{3-3x^2}}$

17. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x}\sqrt{e^x+4}}$

18. $\int \frac{dy}{\sqrt{5-4y^2}}$

19. $\int \frac{dy}{25a-a^3y^2}$

20. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t^2+5}}$

21. $\int \frac{dy}{5-2y^2}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}$

23. $\int \frac{dx}{x^2+b^4}$

24. $\int \frac{dy}{\sqrt{4-2y^2}}$

25. $\int e^{2x}\sqrt{16-e^{4x}}\,dx$

26. $\int \sqrt{1-2x^2}\,dx$

27. $\int \frac{dm}{\sqrt{8-\frac{m^2}{5}}}$

28. $\int \sqrt{(2x+1)^2-a^2}\,dx$

29. $\int \frac{\sqrt{28+343x^{2m}}}{x^{1-m}}\,dx$

30. $\int \frac{dt}{2t^2+7}$

31. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{5x^2-16}}$

32. $\int \frac{dt}{\csc(2t)\cdot(5-\cos^2 2t)}$

33. $\int \frac{\text{sen}\,x\,dx}{1+\cos^2 x}$

34. $\int \sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\,dt+\int \ln(3t)\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\,dt$,

demuestra que:

$$\frac{t\ln(3t)}{2}\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}+2\ln\left(t\ln(3t)+\sqrt{t^2\ln^2(3t)+4}\right)+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales en las que se completa un trinomio cuadrado perfecto

En aquellas integrales con un denominador de la forma ax^2+bx+c, se utiliza el método de completar un trinomio cuadrado perfecto para llegar a las formas:

$$\sqrt{v^2\pm a^2},\ \sqrt{a^2-v^2},\ v^2\pm a^2,\ a^2-v^2$$

Según sea el caso.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

Solución

Se completa el TCP, entonces, el denominador se expresa como:

$$x^2+4x+3=(x^2+4x+4)-4+3=(x+2)^2-1$$

Donde,

$$v^2=(x+2)^2,\ v=x+2,\ dv=dx;\ a^2=1,\ a=1$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+3}=\int \frac{dx}{(x+2)^2-1}=\frac{1}{2(1)}\ln\left|\frac{x+2-1}{x+2+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$

Solución

La expresión

$$x^2-8x+25=(x^2-8x+16)-16+25=(x-4)^2+9$$

Donde,

$$v^2=(x-4)^2,\ v=x-4,\ dv=dx;\ a^2=9,\ a=3$$

Finalmente,

$$\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}=3\int \frac{dx}{(x-4)^2+9}=3\cdot\frac{1}{3}\text{arc tan}\frac{x-4}{3}+C=\text{arc tan}\left(\frac{x-4}{3}\right)+C$$

3 Encuentra el resultado de la integral indefinida $\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

Solución

Se completa el TCP y el trinomio se convierte a la expresión equivalente.

$$2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)=2\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$$

Se utiliza la fórmula,

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\text{arc tan}\frac{v}{a}+C$$

se obtiene la variable, su diferencial y el valor de a, entonces,

$$v^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\ v=x-\frac{1}{2},\ dv=dx;\ a^2=\frac{1}{4},\ a=\frac{1}{2}$$

Se realizan los cambios y se resuelve la integral.

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\text{arc tan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C=\text{arc tan}\frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{1}{2}}+C$$

Por tanto, el resultado de la integral es:

$$\int \frac{dx}{2x^2-2x+1}=\text{arc tan}(2x-1)+C$$

4 Obtén el resultado de $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$

Solución

La expresión

$$2-3x-4x^2=-4\left(x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)=-4\left(x^2+\frac{3}{4}x+\frac{9}{64}-\frac{9}{64}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\ -4\left[\left(x+\frac{3}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right]\ =\ 4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]$$

Se deduce entonces la fórmula que se va a utilizar:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=\text{arc sen}\frac{v}{a}+C$$

Donde,

$$v^2=\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\quad v=x+\frac{3}{8},\ dv=dx;\ a^2=\frac{41}{64},\ a=\frac{\sqrt{41}}{8}$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{4\left[\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2\right]}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{64}-\left(x+\frac{3}{8}\right)^2}}$$

$$=\ \frac{1}{2}\cdot\text{arc sen}\frac{x+\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C\ =\ \frac{1}{2}\cdot\text{arc sen}\frac{\frac{8x+3}{8}}{\frac{\sqrt{41}}{8}}+C\ =\ \frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{8x+3}{\sqrt{41}}+C$$

5 Encuentra el resultado de $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5}$

Solución

En este caso, la expresión se representa como:

$$\frac{2x+5}{x^2+2x+5}=\frac{2x+2}{x^2+2x+5}+\frac{3}{x^2+2x+5}$$

Se ha elegido esta separación debido a que,

$$\text{si}\ \ v=x^2+2x+5\ \ \text{entonces}\ \ dv-(2x+2)dx$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

Para la integral $\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el cambio,

$$v = x^2+2x+5,\ dv = (2x+2)dx \text{ y } \frac{dv}{(2x+2)} = dx$$

Resultando:

$$\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + C$$

Ahora, con la integral $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$, se realiza el siguiente cambio:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\text{arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

Finalmente, al sustituir se obtiene:

$$\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+5} + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + 3\cdot\frac{1}{2}\text{ arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

$$= \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\text{arc tan}\frac{x+1}{2} + C$$

Por tanto,

$$\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\text{arc tan}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

6 Obtén el resultado de $\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}\ dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^{x}}}$

Solución

La integral se expresa de la siguiente manera:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}} + 4\sqrt{e^{3x}}dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^{x}}} = \int \frac{\sqrt{e^{x}}(e^{2x}+4e^{x})dx}{\sqrt{e^{x}}\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{(e^{2x}+4e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$$

Se realiza la separación en el numerador

$$\int \frac{(e^{2x}+4e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{(e^{2x}+3e^{x}+e^{x})\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} + \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$$

Ahora, para la integral $\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se realiza el siguiente cambio:

$$v = e^{2x} + 6e^{x} + 5,\ dv = (2e^{2x} + 6e^{x})dx = 2(e^{2x} + 3e^{x})dx$$

Entonces,

$$\int \frac{(e^{2x}+3e^{x})dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}$$

Por consiguiente, para la integral $\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}}$, se completa el trinomio cuadrado perfecto y se realiza el cambio de variable.

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-9+5}} = \int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+9-4}} = \int \frac{e^{x}\,dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}}$$

Donde,

$$w = e^{x} + 3,\ dw = e^{x}dx$$

Entonces,

$$\int \frac{e^{x}dx}{\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}} = \int \frac{dw}{\sqrt{w^{2}-4}} = \ln\left|w+\sqrt{w^{2}-4}\right| = \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{(e^{x}+3)^{2}-4}\right|$$

$$= \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}\right|$$

Por tanto, se concluye que:

$$\int \frac{\sqrt{e^{5x}}+4\sqrt{e^{3x}}dx}{\sqrt{e^{3x}+6e^{2x}+5e^{x}}} = \sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5} + \ln\left|e^{x}+3+\sqrt{e^{2x}+6e^{x}+5}\right| + C$$

EJERCICIO 7

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x^{2}+6x}$
2. $\int \frac{dx}{x^{2}+8x}$
3. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x+6}$
4. $\int \frac{dx}{2x^{2}+3x+1}$
5. $\int \frac{dx}{x^{2}+5x-14}$
6. $\int \frac{dx}{2x^{2}+9x+4}$
7. $\int \frac{dx}{a^{2}x^{2}+8ax+15}$
8. $\int \frac{3e^{x}dx}{e^{2x}+9e^{x}+20}$
9. $\int \frac{dw}{13w-2w^{2}-15}$
10. $\int \frac{d\alpha}{5+9\alpha-2\alpha^{2}}$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 8}$

12. $\int \frac{e^{2x} + 3e^x - 3}{e^{2x} + 2e^x - 3}\, dx$

13. $\int \frac{\cos x\, dx}{(\operatorname{sen} x - 3)^2 - 3}$

14. $\int \frac{dw}{\sqrt{-5w^2 + 22w - 8}}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 3}}$

16. $\int \frac{dz}{\sqrt{3z^2 + 4z}}$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + x}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 7 \ln x + 6}}$

19. $\int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 9w + 5}}$

20. $\int \sqrt{x^2 + 4x - 3}\, dx$

21. $\int \sqrt{4 - 3x - 2x^2}\, dx$

22. $\int \sqrt{3x - x^2}\, dx$

23. $\int \sqrt{3x^2 - 4x}\, dx$

24. $\int x\sqrt{x^4 - x^2 - 20}\, dx$

25. $\int \sqrt{-x^2 - 5x + 24}\, dx$

26. $\int \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + 2}\, dx$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - 21x}}$

28. $\int e^{nx}\sqrt{3 + 2e^{nx} - e^{2nx}}\, dx$

29. $\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + y + 1}}$

30. $\int \sqrt{3x^2 + 4x + 1}\, dx$

31. $\int \frac{dw}{\sqrt{5w - 2w^2}}$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 3x\sqrt{ax} + 2x}}$

33. $\int \frac{dy}{\sqrt{3y^2 + 13y - 10}}$

34. $\int \frac{(6x - 5)}{3x^2 + 4x + 1}\, dx$

35. $\int \frac{3x - 4}{9 - x^2}\, dx$

36. $\int \frac{4 - 7x}{9x^2 - 16}\, dx$

37. $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 4x + 1}\, dx$

38. $\int \frac{x - 2}{3x^2 + 5x - 4}\, dx$

39. $\int \frac{x + 5}{x^2 - 7x + 6}\, dx$

40. $\int \frac{2x + 21}{3x^2 + 27x - 15}\, dx$

41. $\int \frac{(3x + 2)}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$

42. $\int \frac{3x - 11}{\sqrt{4 - 9x^2}}\, dx$

43. $\int \frac{5 - 2x}{\sqrt{16x^2 + 25}}\, dx$

44. $\int \frac{4 - 3x}{\sqrt{7 - 2x^2}}\, dx$

45. $\int \frac{x+6}{8+14x-10x^2}\,dx$

46. $\int \frac{5x-11}{\sqrt{x^2+3x-5}}\,dx$

47. $\int \frac{2-x}{\sqrt{2x^2+5x-1}}\,dx$

48. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx$

49. $\int (2x+1)\sqrt{x^2-3x+4}\,dx$

50. $\int (3x+7)\sqrt{x^2+7x+6}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 3

Integrales de diferenciales trigonométricas

Reseña HISTÓRICA

Matemático y físico francés nacido en Auxerre y fallecido en París, conocido por sus trabajos sobre la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas series de Fourier.

Participó en la Revolución Francesa y, gracias a la caída del poder de Robespierre, se salvó de ser guillotinado. Se incorporó a la Escuela Normal Superior de París en donde tuvo entre sus profesores a Joseph-Louis Lagrange y Pierre-Simon Laplace. Posteriormente ocupó una cátedra en la Escuela Politécnica.

Según él, cualquier oscilación periódica, por complicada que sea, se puede descomponer en serie de movimientos ondulatorios simples y regulares, la suma de los cuales es la variación periódica compleja original. Es decir se expresa como una serie matemática en la cual los términos son funciones trigonométricas. El teorema de Fourier tiene muchas aplicaciones; se puede utilizar en el estudio del sonido y de la luz y, desde luego, en cualquier fenómeno ondulatorio. El estudio matemático de tales fenómenos, basado en el teorema de Fourier se llama análisis armónico.

Jean-Baptiste-Joseph Fourier
(1768-1830)

Integrales de la forma: $\int \text{sen}^m v\, dv$, $\int \cos^n v\, dv$, con m y n impar

En aquellas integrales cuya función seno o coseno sea una potencia impar, se realiza la separación en potencias pares y siempre sobra una lineal, la cual funcionará como diferencial; el resto se transforma mediante las siguientes identidades trigonométricas:

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$

EJEMPLOS

1 Determina el resultado de $\int \text{sen}^3 x\, dx$

Solución

Se separa la potencia de la siguiente manera:

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x\, dx$$

Se sustituye $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, de esta forma:

$$v = \cos x,\ dv = -\text{sen}\, x\, dx,\ -dv = \text{sen}\, x\, dx$$

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x\, \text{sen}\, x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\,\text{sen}\, x\, dx = \int (1-v^2)(-dv) = \int -dv + \int v^2 dv$$

$$= -v + \frac{1}{3}v^3 + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

Por consiguiente, $\int \text{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

2 Precisa el resultado de $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x}$

Solución

$$\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cos x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \int \frac{(1-\text{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\text{sen}^4 x}$$

Se realiza el cambio de variable, $v = \text{sen}\, x$ y $dv = \cos x\, dx$,

$$\int \frac{(1-v^2)\,dv}{v^4} = \int \frac{dv}{v^4} - \int \frac{dv}{v^2} = \int v^{-4}dv - \int v^{-2}dv = \frac{v^{-3}}{-3} - \frac{v^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3v^3} + \frac{1}{v} + C$$

Pero $v = \text{sen}\, x$, entonces,

$$\frac{1}{\text{sen}\, x} - \frac{1}{3\text{sen}^3 x} + C = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

Finalmente, $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{\text{sen}^4 x} = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

3 Encuentra el resultado de $\int \frac{\operatorname{sen}^5 y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$

Solución

$$\int \frac{\operatorname{sen}^5 y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = \int \frac{\operatorname{sen}^4 y \operatorname{sen} y\, dy}{\sqrt{\cos y}} = \int \frac{(\operatorname{sen}^2 y)^2 \operatorname{sen} y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$$

Se sustituye $\operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos^2 y$ en la integral:

$$\int \frac{(1-\cos^2 y)^2 \operatorname{sen} y\, dy}{\sqrt{\cos y}}$$

se realiza el cambio de variable, $v = \cos y$, $dv = -\operatorname{sen} y\, dy$, $-dv = \operatorname{sen} y\, dy$

$$-\int \frac{\left(1-v^2\right)^2 dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{\left(1-2v^2+v^4\right)dv}{\sqrt{v}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{v}} + 2\int v^{\frac{3}{2}}\, dv - \int v^{\frac{7}{2}}\, dv$$

$$= -2\sqrt{v} + \frac{4}{5}v^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9}v^{\frac{9}{2}} + C$$

Al factorizar $-2\sqrt{v}$ de la expresión se obtiene:

$$= -2\sqrt{v}\left(1 - \frac{2}{5}v^2 + \frac{1}{9}v^4\right) + C \text{, pero } v = \cos y$$

Finalmente,

$$\int \frac{\operatorname{sen}^5 y\, dy}{\sqrt{\cos y}} = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C$$

EJERCICIO 8

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^3 4x \cos 4x\, dx$
2. $\int \cos^5 3x \operatorname{sen} 3x\, dx$
3. $\int \operatorname{sen}^3 ax\, dx$
4. $\int \operatorname{sen}^3 5x\, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^3 \frac{x}{4}\, dx$
6. $\int \cos^3 x\, dx$
7. $\int \cos^3 ax\, dx$
8. $\int \cos^3 6x\, dx$
9. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int \operatorname{sen}^5 x\, dx$
11. $\int \operatorname{sen}^5 ax\, dx$
12. $\int \operatorname{sen}^5 4x\, dx$
13. $\int \operatorname{sen}^5 \frac{x}{2}\, dx$
14. $\int \cos^5 y\, dy$
15. $\int \cos^5 bx\, dx$
16. $\int \cos^5 \frac{x}{3}\, dx$

17. $\int \text{sen}^7\theta\, d\theta$

18. $\int \text{sen}^7 3x\, dx$

19. $\int \cos^7 y\, dy$

20. $\int \cos^7 4x\, dx$

21. $\int \text{sen}^3 4x \cos^5 4x\, dx$

22. $\int \cos^3 x\, \text{sen}^5 x\, dx$

23. $\int \frac{\cos^5 2x}{\sqrt{\text{sen } 2x}}\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \tan^n v\, dv$, $\int \cot^n v\, dv$ con *n* par o impar

En este tipo de integrales se separan potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \qquad \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \tan^3 x\, dx$

Solución

Se realiza la separación de la potencia:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx$$

Se sustituye $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$,

$$\int \tan x(\sec^2 x - 1)\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx$$

Al aplicar $v = \tan x$, $dv = \sec^2 x\, dx$, para la primera integral, entonces:

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx = \int v\, dv - \int \tan x\, dx = \frac{v^2}{2} - (-\ln|\cos x|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

2 Obtén el resultado de $\int (\sec 3x + \tan 3x)^2\, dx$

Solución

Se desarrolla el binomio al cuadrado y se obtiene:

$$\int (\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x + \tan^2 3x)\, dx$$

se realiza el cambio $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$$\int (\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x + \sec^2 3x - 1)dx$$

Se simplifican términos semejantes y resulta:

$$\int (2\sec^2 3x + 2\sec 3x \tan 3x - 1)\, dx$$

Se efectúa el cambio, $v = 3x$, entonces $dv = 3dx$ y $\frac{dv}{3} = dx$

Se procede a integrar

$$= \int \frac{2}{3}\sec^2 v\, dv + \int \frac{2}{3}\sec v \tan v\, dv - \int \frac{dv}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\int \sec^2 v\, dv + \frac{2}{3}\int \sec v \tan v\, dv - \frac{1}{3}\int dv$$

$$= \frac{2}{3}\tan v + \frac{2}{3}\sec v - \frac{1}{3}v + C\ ;$$

pero $v = 3x$, entonces finalmente se obtiene:

$$\int (\sec 3x + \tan 3x)^2\, dx = \frac{2}{3}\tan 3x + \frac{2}{3}\sec 3x - x + C$$

3 Determina el resultado de $\int \cot^5 ax\, dx$

Solución

Al separar la integral

$$\int \cot^5 ax\, dx = \int \cot^3 ax \cot^2 ax\, dx$$

Se realiza el cambio $\cot^2 ax = \csc^2 ax - 1$

$$\int \cot^3 ax(\csc^2 ax - 1)dx = \int \cot^3 ax \csc^2 ax\, dx - \int \cot^3 ax\, dx$$

De nueva cuenta se tiene una potencia impar, por lo que se vuelve a separar y a sustituir la identidad:

$$= \int \cot^3 ax \cdot \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax \cot^2 ax\, dx = \int \cot^3 ax \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax(\csc^2 ax - 1)dx$$

$$= \int \cot^3 ax \cdot \csc^2 ax\, dx - \int \cot ax \csc^2 ax\, dx + \int \cot ax\, dx$$

$v = \cot ax$ y $dv = -a \csc^2 ax\, dx$

$$= -\frac{1}{a}\int v^3 dv + \frac{1}{a}\int v dv + \frac{1}{a}\ln|\text{sen } ax| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\cdot\frac{v^4}{4} + \frac{1}{a}\cdot\frac{v^2}{2} + \frac{1}{a}\ln|\text{sen } ax| + C$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{v^4}{4} - \frac{v^2}{2} - \ln|\text{sen } ax|\right) + C,$$

pero $v = \cot ax$, por lo que finalmente,

$$\int \cot^5 ax\, dx = -\frac{1}{a}\left(\frac{\cot^4 ax}{4} - \frac{\cot^2 ax}{2} - \ln|\text{sen } ax|\right) + C$$

EJERCICIO 9

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \tan^3 5x\, dx$
2. $\int \tan^3 \frac{x}{2}\, dx$
3. $\int \cot^3 4x\, dx$
4. $\int \cot^3 \frac{x}{3}\, dx$
5. $\int \cot^5 6x\, dx$
6. $\int \cot^5 \frac{y}{4}\, dy$
7. $\int \tan^5 5x\, dx$
8. $\int \cot^4 5x\, dx$
9. $\int \tan^4 6x\, dx$
10. $\int (\tan 3x - \cot 3x)^3 dx$
11. $\int (\tan^2 2y + \tan^4 2y)\, dy$
12. $\int (\cot^4 3x + \cot^2 3x)\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \sec^n v\, dv$, $\int \csc^n v\, dv$ con n par

En este tipo de integrales se separa en potencias pares y se sustituye por la identidad trigonométrica respectiva.

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x\ ;\ \csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Precisa el resultado de $\int \sec^4 x\, dx$

Solución

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

Se realiza el cambio con la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$\int (1 + \tan^2 x)\sec^2 x\, dx$$

Al efectuar

$$v = \tan x \text{ y } dv = \sec^2 x\, dx$$

se obtiene:

$$\int (1+v^2)dv = \int dv + \int v^2 dv = v + \frac{v^3}{3} + C$$

Pero $v = \tan x$, entonces,

$$\int \sec^4 x\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \csc^4 \frac{x}{4}\,dx$

Solución

$$\int \csc^4 \frac{x}{4}dx = \int \csc^2 \frac{x}{4}\ \csc^2 \frac{x}{4}\,dx \ = \int\left(1+\cot^2 \frac{x}{4}\right)\csc^2 \frac{x}{4}\,dx$$

Donde

$$v = \cot\frac{x}{4}\ \text{ y }\ dv = -\frac{1}{4}\csc^2\frac{x}{4}\,dx$$

entonces:

$$= -4\int(1+v^2)dv = -4\int dv - 4\int v^2\,dv \ = -4v - \frac{4}{3}v^3 + C$$

pero $v = \cot\frac{x}{4}$, por consiguiente

$$\int \csc^4 \frac{x}{4}dx = -\frac{4}{3}\cot^3\frac{x}{4} - 4\cot\frac{x}{4} + C$$

Integrales de la forma: $\int \tan^m v \cdot \sec^n v\,dv$, $\int \cot^m v \cdot \csc^n v\,dv$ con n par y m par o impar

En este tipo de integrales se emplean las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1;\ \csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$

Solución

En la integral la secante tiene potencia par, entonces se realiza la separación de una secante cuadrada y se sustituye por la identidad trigonométrica correspondiente.

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\,dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\,dx \ = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$

Al efectuar

$$v = \tan x \quad \text{y} \quad dv = \sec^2 x\,dx$$

finalmente se determina que:

$$= \int v^2(1+v^2)dv \ = \int(v^2+v^4)dv = \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + C \ = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \tan^3 \frac{x}{4} \sec^3 \frac{x}{4}\, dx$

Solución

En la integral las potencias, tanto de la tangente como de la secante, son impares, por lo que la separación es para ambas funciones.

$$\int \tan^3 \frac{x}{4} \sec^3 \frac{x}{4}\, dx = \int \tan^2 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx$$

Luego

$$\tan^2 \frac{x}{4} = \sec^2 \frac{x}{4} - 1$$

por consiguiente,

$$= \int \tan^2 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx = \int \left(\sec^2 \frac{x}{4} - 1 \right) \sec^2 \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4} \sec \frac{x}{4}\, dx$$

Ahora, al hacer

$$v = \sec \frac{x}{4} \text{ y } dv = \frac{1}{4} \sec \frac{x}{4} \tan \frac{x}{4}\, dx$$

se obtiene:

$$= 4\int (v^2 - 1)v^2 dv = 4\int v^4 dv - 4\int v^2\, dv = \frac{4}{5}v^5 - \frac{4}{3}v^3 + C$$

$$= \frac{4}{5}\sec^5 \frac{x}{4} - \frac{4}{3}\sec^3 \frac{x}{4} + C$$

EJERCICIO **10**

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \sec^4 3x\, dx$
2. $\int \sec^4 ax\, dx$
3. $\int \sec^4 \frac{x}{6}\, dx$
4. $\int \csc^4 9x\, dx$
5. $\int \csc^4 bx\, dx$
6. $\int \csc^4 \frac{x}{7}\, dx$
7. $\int \sec^4 \frac{2x}{3}\, dx$
8. $\int \csc^4 \frac{5x}{4}\, dx$
9. $\int \tan^2 8x \sec^4 8x\, dx$
10. $\int \tan^2 ax \sec^4 ax\, dx$
11. $\int \tan^2 \frac{x}{7} \sec^4 \frac{x}{7}\, dx$
12. $\int \tan^2 \frac{5x}{3} \sec^4 \frac{5x}{3}\, dx$
13. $\int \tan^3 5x \sec^3 5x\, dx$
14. $\int \tan^3 bx \sec^3 bx\, dx$

15. $\int \tan^3 \frac{x}{6} \sec^3 \frac{x}{6}\, dx$

16. $\int \tan^3 \frac{4x}{7} \sec^3 \frac{4x}{7}\, dx$

17. $\int \cot^3 bx \csc^3 bx\, dx$

18. $\int \cot^3 4x \csc^3 4x\, dx$

19. $\int \sec^6 \frac{x}{2}\, dx$

20. $\int \csc^4\left(\frac{3\theta}{2}\right) d\theta$

21. $\int 2x^2 \sec^4 x^3\, dx$

22. $\int \left(1+\frac{1}{\text{ctg}^2 x}\right)^3 dx$

23. $\int \sec^6 \alpha \cos 2\alpha\, d\alpha$

24. $\int \frac{dt}{\cos^4 2t}$

25. $\int \csc^4(3x-1)dx$

26. $\int \tan^5 x \sec x\, dx$

27. $\int \tan 2x \sec^3 2x\, dx$

28. $\int \text{ctg}^5 x \csc^3 x\, dx$

29. $\int \frac{\text{sen}^5 3x\, dx}{\cos^8 3x}$

30. $\int \frac{\sec^6 x\, dx}{\sqrt{\tan x}}$

31. $\int \left(\sec^4 3t - \csc^4\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$

32. $\int \csc^4(2x-1)\, dx$

33. $\int \frac{d\theta}{\text{sen}^6\left(\frac{\theta}{5}\right)}$

34. $\int \csc^8 x\, dx$

35. $\int x(1-\tan^4 x^2)\, dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma: $\int \text{sen}^m v\, dv$ y $\int \cos^n v\, dv$, con m y n par

En estas integrales cuando las potencias de las funciones sen x y cos x son pares, se utilizan las identidades trigonométricas del doble de un ángulo:

$$\text{sen } v \cos v = \frac{1}{2}\text{sen } 2v \quad \text{sen}^2 v = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2v \quad \cos^2 v = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2v$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \text{sen}^2 x\, dx$

Solución

Se emplea la identidad correspondiente y se integra:

$$\int \text{sen}^2 x\, dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen } 2x}{4} + C$$

2 Determina el resultado de $\int \text{sen}^4 2x\,dx$

Solución

$$\int \text{sen}^4 2x\,dx = \int (\text{sen}^2 2x)^2\,dx = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\ 4x+\frac{1}{4}\cos^2 4x\right)dx$$

Ahora se transforma la potencia par de cos 4x, utilizando la identidad:

$$\cos^2 v = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2v$$

Entonces,

$$\int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos\ 4x+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 8x\right)\right)dx = \int\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 8x\right)dx$$

Ahora bien, al integrar cada uno de los términos queda:

$$\int \text{sen}^4 2x\,dx = \frac{3}{8}x-\frac{\text{sen}\ 4x}{8}+\frac{\text{sen}\ 8x}{64}+C$$

3 Encuentra el resultado de $\int \cos^6 \frac{x}{3}\,dx$

Solución

La integral se expresa de la siguiente manera

$$\int \cos^6 \frac{x}{3}\,dx = \int\left(\cos^2 \frac{x}{3}\right)^3 dx$$

Se sustituye $\cos^2 \frac{x}{3} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}$

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 \frac{x}{3}\,dx &= \int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}\right)^3 dx\\
&= \int\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3}+\frac{3}{8}\cos^2\frac{2x}{3}+\frac{1}{8}\cos^3\frac{2x}{3}\right)dx\\
&= \int\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3}+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{4x}{3}\right)+\frac{1}{8}\cos^3\frac{2x}{3}\right)dx\\
&= \int\left(\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3}+\frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3}+\frac{1}{8}\cos^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx\\
&= \int\left(\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3}+\frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3}+\frac{1}{8}\left(1-\text{sen}^2\frac{2x}{3}\right)\cos\frac{2x}{3}\right)dx\\
&= \int\left(\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\cos\frac{2x}{3}+\frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3}+\frac{1}{8}\cos\frac{2x}{3}-\frac{1}{8}\text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx\\
&= \int\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{2}\cos\frac{2x}{3}+\frac{3}{16}\cos\frac{4x}{3}-\frac{1}{8}\text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\right)dx\\
&= \frac{5}{16}\int dx + \frac{1}{2}\int\cos\frac{2x}{3}\,dx + \frac{3}{16}\int\cos\frac{4x}{3}\,dx - \frac{1}{8}\int\text{sen}^2\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx
\end{aligned}$$

Se aplica el cambio de variable para cada una de las integrales,

$$v=\frac{2x}{3}\quad dv=\frac{2}{3}dx\quad z=\frac{4}{3}x\quad dz=\frac{4}{3}dx\quad w=\operatorname{sen}\frac{2x}{3},\quad dw=\frac{2}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$$

Entonces,

$$=\frac{5}{16}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int\cos v\,dv+\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{4}\int\cos z\,dz-\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}\int w^2dw$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{3}{4}\operatorname{sen}v+\frac{9}{64}\operatorname{sen}z-\frac{3}{16}\cdot\frac{w^3}{3}+C$$

$$=\frac{5}{16}x+\frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{2x}{3}+\frac{9}{64}\operatorname{sen}\frac{4x}{3}-\frac{1}{16}\operatorname{sen}^3\frac{2x}{3}+C$$

EJERCICIO 11

Verifica las siguientes integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^2 3x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx$
3. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{5}\,dx$
4. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{3x}{4}\,dx$
5. $\int \cos^2 5x\,dx$
6. $\int \cos^2 bx\,dx$
7. $\int \cos^2 \frac{x}{7}\,dx$
8. $\int \cos^2 \frac{7x}{2}\,dx$
9. $\int \operatorname{sen}^4 8x\,dx$
10. $\int \operatorname{sen}^4 ax\,dx$
11. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{x}{7}\,dx$
12. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{3x}{4}\,dx$
13. $\int \cos^4 9x\,dx$
14. $\int \cos^4 bx\,dx$
15. $\int \cos^4 \frac{x}{3}\,dx$
16. $\int \cos^4 \frac{5x}{3}\,dx$
17. $\int \operatorname{sen}^6 x\,dx$
18. $\int \operatorname{sen}^6 4x\,dx$
19. $\int \operatorname{sen}^6 ax\,dx$
20. $\int \operatorname{sen}^6 \frac{x}{4}\,dx$
21. $\int \operatorname{sen}^6 \frac{5x}{2}\,dx$
22. $\int \cos^6 x\,dx$
23. $\int \cos^6 3x\,dx$
24. $\int \cos^6 bx\,dx$
25. $\int \cos^6 \frac{x}{2}\,dx$
26. $\int \cos^6 \frac{2x}{5}\,dx$
27. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sec^5 x}$
28. $\int \operatorname{sen}^4 3x\,dx$

29. $\int \frac{dy}{\csc^4 \frac{y}{2}}$

30. $\int \frac{dx}{\csc^2 x}$

31. $\int \frac{\cos^2 3x\,dx}{1+\tan^2 3x}$

32. $\int 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

33. $\int (3-\cos\alpha)^2\,d\alpha$

34. $\int (\text{sen}\,x+1)^3\,dx$

35. $\int \text{sen}^2\left(\frac{x}{b}\right)\cos^2\left(\frac{x}{b}\right)dx$

36. $\int\left(\text{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right)-\sqrt{\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)}\right)^2 d\theta$

37. $\int \cos^8 x\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integrales de la forma $\int \text{sen}\,mx\cdot\cos nx\,dx$, $\int \text{sen}\,mx\cdot\text{sen}\,nx\,dx$, $\int \cos mx\cos nx\,dx$

En las siguientes integrales se utilizan las identidades trigonométricas:

$$\int \text{sen}\,mx\cos nx\,dx=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

$$\int \text{sen}\,mx\,\text{sen}\,nx\,dx=-\frac{\text{sen}(m+n)\,x}{2(m+n)}+\frac{\text{sen}(m-n)\,x}{2(m-n)}+C$$

$$\int \cos mx\cos nx\,dx=\frac{\text{sen}(m+n)\,x}{2(m+n)}+\frac{\text{sen}(m-n)\,x}{2(m-n)}+C\text{, cuando } m\neq n$$

EJEMPLOS

1 Encuentra el resultado de $\int \text{sen}\,2x\cos 4x\,dx$

Solución

$$\int \text{sen}\,2x\cos 4x\,dx=-\frac{\cos(2+4)\,x}{2(2+4)}-\frac{\cos(2-4)\,x}{2(2-4)}+C=-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos(-2x)}{-4}+C$$

$$=-\frac{\cos 6x}{12}+\frac{\cos 2x}{4}+C$$

2 Determina el resultado de $\int \cos 3x \cos x\, dx$

Solución

$$\int \cos 3x \cos x\, dx = \frac{\text{sen}(3+1)x}{2(3+1)} + \frac{\text{sen}(3-1)x}{2(3-1)} + C$$

$$= \frac{\text{sen } 4x}{2(4)} + \frac{\text{sen } 2x}{2(2)} + C$$

$$= \frac{\text{sen } 4x}{8} + \frac{\text{sen } 2x}{4} + C$$

EJERCICIO 12

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \text{sen } 2x \text{ sen } 3x\, dx$
2. $\int \text{sen } x \cos 3x\, dx$
3. $\int \text{sen } 5x \text{ sen } x\, dx$
4. $\int \cos 7y \cos 3y\, dy$
5. $\int \cos(5x)\, \text{sen}(2x)\, dx$
6. $\int \text{sen}\left(\frac{2\alpha}{3}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha$
7. $\int \cos\left(\frac{3}{5}w\right) \cos\left(\frac{1}{4}w\right) dw$
8. $\int \text{sen}(mx+b)\, \text{sen}(mx-b)\, dx$
9. $\int \text{sen}(3x+4)\, \text{sen}(3x-4)\, dx$
10. $\int \text{sen } 3w \text{ sen } 2w \text{ sen } w\, dw$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 4

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

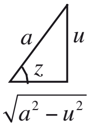
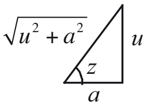
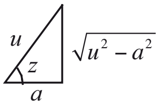
Reseña HISTÓRICA

Uno de los científicos matemáticos y físicos italianos más importantes de finales del siglo XVIII. Inventó y maduró el cálculo de variaciones y más tarde lo aplicó a una nueva disciplina, la mecánica celeste, sobre todo al hallazgo de mejores soluciones al problema de tres cuerpos. También contribuyó significativamente con la solución numérica y algebraica de ecuaciones y con la teoría numérica. En su clásica *Mecanique analytique* (*Mecánicas analíticas*, 1788), transformó la mecánica en una rama del análisis matemático. El tratado resumió los principales resultados sobre mecánica que se saben del siglo XVIII y es notable por su uso de la teoría de ecuaciones diferenciales. Otra preocupación central de Lagrange fueron los fundamentos del cálculo. En un libro de 1797 enfatizó la importancia de la serie de Taylor y el concepto de función. Sus trabajos sirvieron de base para los de Augustin Cauchy, Niels Henrik Abel, y Karl Weierstrass en el siguiente siglo.

Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)

Sustitución trigonométrica

Algunas integrales que involucran expresiones de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$, $\sqrt{u^2+a^2}$ y $\sqrt{u^2-a^2}$, deben resolverse utilizando las siguientes transformaciones:

Caso	**Cambio**	**Diferencial**	**Transformación**	**Triángulo**
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a \operatorname{sen} z$	$du = a \cos z\, dz$	$\sqrt{a^2-u^2} = a \cos z$	
$\sqrt{u^2+a^2}$	$u = a \tan z$	$du = a \sec^2 z\, dz$	$\sqrt{u^2+a^2} = a \sec z$	
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a \sec z$	$du = a \sec z \tan z\, dz$	$\sqrt{u^2-a^2} = a \tan z$	

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \frac{dy}{(y^2+7)^{\frac{3}{2}}}$

Solución

Para resolver la integral se utiliza el segundo caso y se hacen los cambios propuestos, entonces

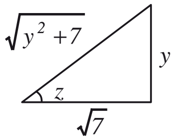
$$u^2 = y^2 \;\rightarrow\; u = y, \quad \text{luego} \quad a^2 = 7 \;\rightarrow\; a = \sqrt{7}$$

Cambiando los elementos, se sustituyen en la integral:

$$y = \sqrt{7}\tan z \qquad dy = \sqrt{7}\sec^2 z\, dz \qquad \sqrt{y^2+7} = \sqrt{7}\sec z$$

$$\int \frac{dy}{(y^2\;1\,7)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dy}{\left(\sqrt{y^2+7}\right)^3} = \int \frac{\sqrt{7}\sec^2 z\, dz}{\left(\sqrt{7}\sec z\right)^3} = \int \frac{dz}{7\sec z} = \frac{1}{7}\int \cos z\, dz = \frac{1}{7}\operatorname{sen} z + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces



$$\operatorname{sen} z = \frac{y}{\sqrt{y^2+7}}$$

Se concluye que,

$$\int \frac{dy}{\left(y^2+7\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{7\sqrt{y^2+7}} + C$$

2 Resuelve $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$

Solución

$$u^2 = x^2 \quad \rightarrow \quad u = x; a^2 = 4 \quad \rightarrow \quad a = 2$$

Para resolver la integral se aplica el tercer caso, por tanto, los cambios se sustituyen en la integral:

$$x = 2\sec\theta,\ dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$$

Entonces,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{(2\sec\theta)^3(2\sec\theta\tan\theta)}{2\tan\theta}d\theta = \int 8\sec^4\theta\,d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\ \sec^2\theta\,d\theta$$

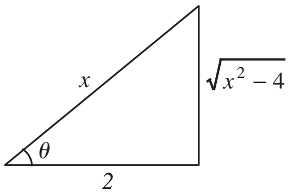
$$= 8\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 8\int (\sec^2\theta + \sec^2\theta\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$= 8\int \sec^2\theta\,d\theta + 8\int \tan^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo, entonces



En el triángulo

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx = 8\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right) + \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^3 + C$$

$$= 4\left(\sqrt{x^2-4}\right) + \frac{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}{3} + C$$

$$= \frac{(x^2+8)\sqrt{x^2-4}}{3} + C$$

3 Determina el resultado de $\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx$

Solución

$$v^2 = 16x^2 \;\rightarrow\; v = 4x;\; a^2 = 25 \;\rightarrow\; a = 5$$

Para resolver la integral se utiliza el primer caso, donde

$$4x = 5\text{ sen }\theta,\; x = \frac{5}{4}\text{sen }\theta,\; dx = \frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta \;\text{ y }\; \sqrt{25-16x^2} = 5\cos\theta$$

La nueva integral es:

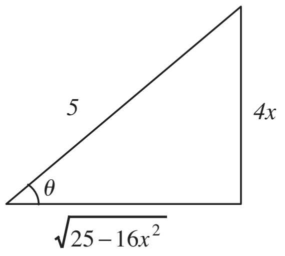
$$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx = \int \frac{5\cos\theta}{\frac{5}{4}\text{sen }\theta}\cdot\frac{5}{4}\cos\theta\, d\theta = 5\int\frac{\cos^2\theta}{\text{sen }\theta}\,d\theta = 5\int\frac{1-\text{sen}^2\theta}{\text{sen }\theta}\,d\theta$$

$$= 5\int(\csc\theta - \text{sen }\theta)\,d\theta$$

$$= 5(\ln|\csc\theta-\cot\theta| - (-\cos\theta)) + C$$

$$= 5\ln|\csc\theta-\cot\theta| + 5\cos\theta + C$$

Este resultado se cambia a términos algebraicos por medio del triángulo,



$$\csc\theta = \frac{5}{4x}$$

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{25-16x^2}}{5}$$

Finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{25-16x^2}}{x}\,dx = 5\ln\left|\frac{5}{4x} - \frac{\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + 5\cdot\frac{\sqrt{25-16x^2}}{5} + C$$

$$= 5\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-16x^2}}{4x}\right| + \sqrt{25-16x^2} + C$$

EJERCICIO 13

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+36}}$
2. $\int \frac{dw}{(w^2+5)^{\frac{3}{2}}}$
3. $\int \frac{y^2dy}{(y^2+3)^{\frac{3}{2}}}$
4. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$
5. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2+25}}$
6. $\int \frac{(36-25x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}dx$
7. $\int \frac{\alpha^2d\alpha}{\sqrt{4\alpha-\alpha^2}}$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2+16}}$
9. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-16}}$
10. $\int \frac{\sqrt{5-\theta^2}}{\theta^2}d\theta$
11. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$
12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$
13. $\int \frac{y^2dy}{(9-y^2)^{\frac{3}{2}}}$
14. $\int y^3\sqrt{3-y^2}\,dy$
15. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{6x-x^2}}$
16. $\int \frac{w^3}{\sqrt{w^2+7}}dw$
17. $\int \frac{x^4}{\sqrt{3-x^2}}dx$
18. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{x^2-11}}$
19. $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$
20. $\int \frac{\ln w}{w\sqrt{4+4\ln w-\ln^2 w}}dw$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por partes

Deducción de la fórmula
Sean u y v funciones, la diferencial del producto es:

$$d(uv) = u\cdot dv + v\cdot du$$

Se despeja $u\,dv$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Al integrar la expresión se obtiene la fórmula de integración por partes,

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

Donde:

1. u es una función fácil de derivar.
2. dv es una función fácil de integrar.
3. $\int v\,du$ es más sencilla que la integral inicial.

La integral por partes se aplica en los siguientes casos:

1. Algebraicas por trigonométricas.
2. Algebraicas por exponenciales.
3. Exponenciales por trigonométricas.
4. Logarítmicas.
5. Logarítmicas por algebraicas.
6. Funciones trigonométricas inversas.
7. Funciones trigonométricas inversas por algebraicas.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

Solución

Se determinan u y dv y mediante una diferencial e integral se obtienen du y v respectivamente.

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

Se aplica la fórmula:

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2 Determina el resultado de $\int xe^x\,dx$

Solución

Se eligen u y dv de la siguiente manera:

$$u = x \qquad dv = e^x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^x dx = e^x$$

Se sustituyen los datos en la fórmula, entonces,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

por tanto,

$$\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$$

3 Encuentra el resultado de $\int \ln x\,dx$

Solución

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \int dx = x$$

Al aplicar la fórmula se obtiene:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = (\ln x - 1) + C$$

4 Obtén el resultado de $\int \text{arc tan}\, x\,dx$

Solución

$$u = \text{arc tan}\, x \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = \int dx = x$$

Por consiguiente,

$$\int \text{arc tan}\, x\,dx = x\,\text{arc tan}\, x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

La nueva integral se resuelve por cambio de variable, entonces se elige

$$w = 1 + x^2, \quad dw = 2x\,dx$$

Y el resultado es:

$$\int \text{arc tan}\, x\,dx = x\,\text{arc tan}\, x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\,\text{arc tan}\, x - \frac{1}{2}\int\frac{dw}{w}$$

$$= x\,\text{arc tan}\, x - \frac{1}{2}\ln|w| + C$$

Por consiguiente,

$$\int \text{arc tan}\, x\,dx = x\,\text{arc tan}\, x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

5 Determina el resultado de $\int e^x \cos x\, dx$

Solución

$$u = e^x \qquad dv = \cos x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$$

Por tanto,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

La nueva integral se resuelve integrando por partes,

$$u = e^x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

$$du = e^x\, dx \qquad v = -\cos x$$

Resulta

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x\, dx\right) = e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

Entonces,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

Se despeja $\int e^x \cos x\, dx$; $\quad \int e^x \cos x\, dx + \int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C$

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + C$$

Finalmente,

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$$

EJERCICIO 14

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int xe^{3x} dx$
2. $\int xe^{ax} dx$
3. $\int x\, e^{\frac{x}{3}} dx$
4. $\int x \operatorname{sen} 5x\, dx$
5. $\int x \operatorname{sen} ax\, dx$
6. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{4}\, dx$
7. $\int x \cos 4x\, dx$
8. $\int x \cos bx\, dx$
9. $\int x \cos \frac{x}{3}\, dx$
10. $\int x^2 \ln x\, dx$
11. $\int 2x \ln x^2\, dx$
12. $\int x^5 \ln x\, dx$
13. $\int x^4 \ln 5x\, dx$
14. $\int x^n \ln x\, dx$

15. $\int x^2 e^x\,dx$

16. $\int y^2 e^{3y}\,dy$

17. $\int x^3 e^{4x}\,dx$

18. $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\,dx$

19. $\int x^2 \operatorname{sen} bx\,dx$

20. $\int x^3 \cos\frac{x}{2}\,dx$

21. $\int x\csc^2 ax\,dx$

22. $\int y\sec^2 my\,dy$

23. $\int \operatorname{arc} \cos ax\,dx$

24. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} bx\,dx$

25. $\int \operatorname{arc} \tan ax\,dx$

26. $\int \operatorname{arc} \sec mx\,dx$

27. $\int \operatorname{arc}\cot\frac{x}{n}\,dx$

28. $\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$

29. $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$

30. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{5t+3}}$

31. $\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^4}$

32. $\int \frac{x^2\,dx}{(2x+1)^5}$

33. $\int \frac{\ln(\ln y)}{y}\,dy$

34. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

35. $\int \frac{\operatorname{arc}\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

36. $\int e^{2x}\cos x\,dx$

37. $\int (\operatorname{arc}\cos y)^2\,dy$

38. $\int \frac{\operatorname{arc}\cos x}{x^2}\,dx$

39. $\int \frac{w^2}{\sqrt{16-w^2}}\,dw$

40. $\int \operatorname{sen}^2(\ln x)\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por fracciones parciales

Integrales de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$

Caso I. El denominador tiene sólo factores de 1er grado que no se repiten
A cada factor de la forma:

$$ax + b$$

Le corresponde una fracción de la forma,

$$\frac{A}{ax+b}$$

Donde A es una constante por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}$

Solución

Se factoriza el denominador

$$\frac{7x+29}{x^2+8x+15}=\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)} \quad \rightarrow \quad \frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x+3}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{7x+29}{(x+5)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+5)}{(x+5)(x+3)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$7x+29=A(x+3)+B(x+5)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$7x+29=x(A+B)+3A+5B$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B=7 \\ 3A+5B=29 \end{cases}$$

la solución del sistema es:

$$A=3 \quad \text{y} \quad B=4$$

Entonces:

$$\int \frac{(7x+29)}{x^2+8x+15}dx=\int\left(\frac{3}{x+5}+\frac{4}{x+3}\right)dx=\int\frac{3}{x+5}dx+\int\frac{4}{x+3}dx=3\ln|x+5|+4\ln|x+3|+C$$

$$\int \frac{(7x+29)dx}{x^2+8x+15}=\ln\left|(x+5)^3\cdot(x+3)^4\right|+C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$

Solución

Se factoriza el denominador,

$$\frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}=\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

Se hace la equivalencia como sigue:

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$$

Se resuelve la fracción,

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)}{x(x-2)(x+1)}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad,

$$4x-2=A(x^2-x-2)+B(x^2+x)+C(x^2-2x)$$

Se agrupan y se factorizan los términos semejantes,

$$4x-2=x^2(A+B+C)+x(-A+B-2C)-2A$$

Resultando un sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B-2C=4 \\ -2A=-2 \end{cases},$$

la solución del sistema es:

$$A=1,\ B=1,\ C=-2$$

Entonces:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-2}-2\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x|+\ln|x-2|-2\ln|x+1|+C$$

$$=\ln|x|+\ln|x-2|-\ln(x+1)^2+C$$

Se aplican las leyes de los logaritmos para simplificar la expresión:

$$=\ln\frac{|x(x-2)|}{(x+1)^2}+C=\ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

Por consiguiente:

$$\int\frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}=\ln\frac{|x^2-2x|}{(x+1)^2}+C$$

➲ **Caso II.** Los factores del denominador son todos de 1er grado y algunos se repiten

Si se tiene un factor de la forma $(ax+b)^n$, se desarrolla una suma como sigue:

$$\frac{A}{(ax+b)^n}+\frac{B}{(ax+b)^{n-1}}+\frac{C}{(ax+b)^{n-2}}+\ldots+\frac{Z}{ax+b}$$

En donde A, B, C y Z son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de: $\int \frac{\left(3x^2+5x\right)dx}{(x-1)(x+1)^2}$

Solución

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-1)+C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x^2+2x+1)+B(x-1)+C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Luego, para que se cumpla la igualdad:

$$3x^2+5x=x^2(A+C)+x(2A+B)+A-B-C$$

Entonces se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B=5, \\ A-B-C=0 \end{cases}$$

su solución es:

$$A=2, B=1, C=1$$

finalmente,

$$\int \frac{(3x^2+5x)dx}{(x-1)(x+1)^2}=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}=2\ln|x-1|-\frac{1}{x+1}+\ln|x+1|+C$$

$$=\ln\left|(x+1)(x-1)^2\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

2 Resuelve $\int \frac{(y^4-8)}{y^3+2y^2}\,dy$

Solución

Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, se efectúa la división.

$$\frac{y^4-8}{y^3+2y^2}=y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}$$

Entonces,

$$\int\frac{\left(y^4-8\right)dy}{y^3+2y^2}=\int\left(y-2+\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}\right)dy$$

Se separan las integrales,

$$=\int y\,dy-2\int dy+\int\frac{\left(4y^2-8\right)dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\int\frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$$

La integral $\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^2}$ se resuelve mediante fracciones parciales,

$$\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}=\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)} \quad \rightarrow \quad \frac{4y^2-8}{y^2(y+2)}=\frac{A}{y^2}+\frac{B}{y}+\frac{C}{y+2}$$

$$\frac{4y^2-8}{y^2(y+2)}=\frac{A(y+2)+By(y+2)+Cy^2}{y^2(y+2)}=\frac{y^2(B+C)+y(A+2B)+2A}{y^2(y+2)}$$

De la igualdad se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} B+C=4 \\ A+2B=0 \\ 2A=-8 \end{cases},$$

donde

$$A=-4, B=2 \text{ y } C=2$$

La integral se separa de la siguiente manera:

$$\int \frac{(4y^2-8)dy}{y^3+2y^{2y}}=-4\int\frac{dy}{y^2}+2\int\frac{dy}{y}+2\int\frac{dy}{y+2}=\frac{4}{y}+2\ln|y|+2\ln|y+2|+C$$

$$=\frac{4}{y}+2(\ln|y|+\ln|y+2|)+C$$

$$=\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

Se concluye que,

$$\int\frac{(y^4-8)\,dy}{y^3+2y^2}=\frac{y^2}{2}-2y+\frac{4}{y}+2\ln|y^2+2y|+C$$

EJERCICIO 15

Obtén las siguientes integrales:

1. $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}dx$
2. $\int \frac{4x^2-2x+1}{4x^3-x}dx$
3. $\int \frac{(x^2+11x-30)\,dx}{x^3-5x^2+6x}$
4. $\int \frac{(12+10x-2x^2)\,dx}{x^3-4x}$
5. $\int \frac{(-9x-9)\,dx}{x(x^2-9)}$
6. $\int \frac{7x^2-4}{x^3+x^2-2x}$
7. $\int \frac{(16x^2-48x+15)\,dx}{2x^3-7x^2+3x}$
8. $\int \frac{(8+3x-x^2)\,dx}{(2x+3)(x+2)^2}$
9. $\int \frac{2x^2-5x+4dx}{(x-2)^3}$
10. $\int \frac{2x^2-10x+14}{(x-3)^3}$
11. $\int \frac{(x^2+x-1)}{x^3+2x^2+x}dx$
12. $\int \frac{dy}{(y-m)(y-n)}$

13. $\int \frac{w^2 - 9w + 25}{w^2 - 9w + 20}\, dw$

14. $\int \frac{dy}{(y-3)(y-2)(y-1)}$

15. $\int \frac{3 - 5x}{x^3 - 6x^2 + 9x}\, dx$

16. $\int \frac{3\, dw}{w^3 - w}$

17. $\int \frac{(11x - 7)\, dx}{2x^2 - 3x - 2}$

18. $\int \frac{w^2 dw}{(w-6)(w^2 - 36)}$

19. $\int \frac{8x - 3}{12x^2 - 7x + 1} dx$

20. $\int \frac{(x - x^2)dx}{3x^3 + 26x^2 + 64x + 32}$

21. $\int \frac{5x^2 - 5}{x^3 - 9x^2 + 23x - 15} dx$

22. $\int \frac{2x^5 + x^4 - 39x^3 - 22x^2 + 112x + 96}{4x^3 - 25x^2 + 38x - 8}\, dx$

23. $\int \frac{dx}{16x - x^3}$

24. $\int \frac{5 - 4x}{6x - x^2 - x^3} dx$

25. $\int \frac{m}{(1-m)^2} dm$

26. $\int \frac{y\, dy}{(y+5)^2 (y-5)}$

27. $\int \frac{(x+2)dx}{x(x+6)^2}$

28. $\int \frac{x^2 + 1}{(2x-1)^3}\, dx$

29. $\int \frac{1 + x^5}{(x-1)^4}\, dx$

30. $\int \frac{x^3}{(x-3)^2 (x+3)^2} dx$

31. $\int \frac{x^3 - 1}{x^3 (x-2)^2} dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Caso III. El denominador contiene factores de segundo grado y ninguno de ellos se repite
A todo factor de la forma $ax^2 + bx + c$, le corresponde una fracción de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

En donde A y B son constantes por determinar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el resultado de $\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}$

Solución

La expresión

$$\frac{4x^2+6}{x^3+3x}=\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}$$

entonces:

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)x}{x(x^2+3)}$$

$$\frac{4x^2+6}{x(x^2+3)}=\frac{x^2(A+B)+Cx+3A}{x(x^2+3)}$$

De la igualdad resulta el sistema:

$$\begin{cases} A+B=4 \\ C=0 \\ 3A=6 \end{cases}$$

donde

$$A=2, B=2, C=0$$

Entonces,

$$\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\int \frac{2dx}{x}+\int \frac{(2x+0)dx}{x^2+3}=2\int \frac{dx}{x}+2\int \frac{x\,dx}{x^2+3}=2\ln|x|+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2+\ln(x^2+3)+C$$

$$=\ln x^2(x^2+3)+C$$

Por consiguiente,

$$\int \frac{(4x^2+6)dx}{x^3+3x}=\ln x^2(x^2+3)+C$$

2 Determina el resultado de $\int \frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx$

Solución

Se realiza la separación mediante fracciones parciales,

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-3)}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$=\frac{A(x^2+1)+Bx^2-3Bx+Cx-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

$$\frac{x^2+x}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(-3B+C)+A-3C}{(x-3)(x^2+1)}$$

De la igualdad resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -3B+C=1 \\ A-3C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=\frac{6}{5},\ B=-\frac{1}{5}\text{ y } C=\frac{2}{5}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int\frac{(x^2+x)dx}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-3}+\int\frac{\left(-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}\right)dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{6}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{6}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{10}\ln(x^2+1)+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

$$=\ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right|+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

Finalmente:

$$\int\frac{(x^2+x)}{(x-3)(x^2+1)}\,dx=\ln\left|\frac{(x-3)^{\frac{6}{5}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{10}}}\right|+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

Caso IV. Los factores del denominador son todos de segundo grado y algunos se repiten
Si existe un factor de segundo grado de la forma

$$(ax^2+bx+c)^n$$

Se desarrolla una suma de n fracciones parciales, de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{Vx+W}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{Yx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el resultado de $\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}$

Solución

Se realiza la separación mediante fracciones parciales:

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A(x^2+2)^2+(Bx+C)(x^3+2x)+(Dx+E)x}{x(x^2+2)^2}$$

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{A(x^4+4x^2+4)+(Bx^4+2Bx^2+Cx^3+2Cx)+(Dx^2+Ex)}{x(x^2+2)^2}$$

Se agrupan términos semejantes,

$$\frac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}=\frac{x^4(A+B)+Cx^3+x^2(4A+2B+D)+x(2C+E)+4A}{x(x^2+2)^2}$$

De la igualdad anterior se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 4A+2B+D=4 \\ 2C+E=2 \\ 4A=8 \\ C=0 \end{cases}$$

donde

$$A=2, B=-2, C=0, D=0 \text{ y } E=2$$

La integral se puede separar en:

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+2\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$$=2\ln|x|-\ln|x^2+2|+2\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

La última integral se resuelve por sustitución trigonométrica y el resultado es:

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)^2}=\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}+C$$

Este resultado se sustituye en la integral.

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2}=\ln|x^2|-\ln|x^2+2|+2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4(x^2+2)}\right)+C$$

Entonces se concluye que:

$$\int \frac{(4x^2+2x+8)\,dx}{x(x^2+2)^2}=\ln\left|\frac{x^2}{x^2+2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{2}\right)+\frac{x}{2x^2+4}+C$$

2 Encuentra el resultado de $\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2}$

Solución

Como el numerador es más grande en grado que el denominador, se realiza la división,

$$\frac{x^5}{(x^2+4)^2} = x - \frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2}$$

Entonces la integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2} = \int x dx - \int \frac{(8x^3+16x)\,dx}{(x^2+4)^2}$$

La integral

$$\int \frac{(8x^3+16x)\,dx}{(x^2+4)^2}$$

se realiza por fracciones parciales,

$$\frac{8x^3+16x}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)+Cx+D}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{Ax^3+Bx^2+x(4A+C)+4B+D}{(x^2+4)^2}$$

De la cual se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A = 8 \\ B = 0 \\ 4A + C = 16 \\ 4B + D = 0 \end{cases}$$

donde $A = 8$, $B = 0$, $C = -16$ y $D = 0$

$$\int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = 8\int \frac{x\,dx}{x^2+4} - 16\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^2} = 4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}$$

Finalmente, este resultado se sustituye en la integral

$$\int \frac{x^5 dx}{(x^2+4)^2} = \int x dx - \int \frac{(8x^3+16x)dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2}{2} - \left(4\ln\left|x^2+4\right| + \frac{8}{x^2+4}\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4\ln\left|x^2+4\right| - \frac{8}{x^2+4} + C$$

EJERCICIO 16

Realiza las siguientes integrales:

1. $\int \frac{dm}{m^3+m^2}$
2. $\int \frac{dm}{m^3+m}$
3. $\int \frac{x^5-6x^3-6x^2-8}{x^3-6x}\,dx$
4. $\int \frac{(2x^5+x^4+37x^3+28x^2+171x+162)}{x(x^2+9)^2}\,dx$
5. $\int \frac{8\,dy}{y^4-16}$
6. $\int \frac{x^4-1}{x^3-x^2+9x-9}\,dx$
7. $\int \frac{4x^2+48}{16-x^4}\,dx$
8. $\int \frac{y^3+5y}{(y^2+1)^2}\,dy$
9. $\int \frac{x^3+4}{x^4-5x^2+4}\,dx$
10. $\int \frac{dx}{x^3-8}$
11. $\int \frac{y^5}{1-y^4}\,dy$
12. $\int \frac{2x^3+9x^2+14x+8}{(x^2+2x)(x^2+2)}\,dx$
13. $\int \frac{(5x^4-x^3+8x^2-4x+4)}{(x^2+1)^2(x-1)}\,dx$
14. $\int \frac{(3x^2+5x-1)}{(x^2+2x-1)^2}\,dx$
15. $\int \frac{x^2-5x+3}{(x^2-6x+8)^2}\,dx$
16. $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+4)^2}$
17. $\int \frac{(4x^4+x^3+30x^2+7x+49)}{(x^2+4)^2(x+1)}\,dx$
18. $\int \frac{(3x^4+x^3+22x^2+5x+50)}{x(x^2+5)^2}\,dx$
19. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+5)^2}$
20. Demuestra que $\int \frac{3x^5+13x^4+32x^3+8x^2-40x-75}{x^2(x^2+3x+5)^2}\,dx$ equivale a:

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4(x^2+3x+5)\right|-\frac{35\sqrt{11}}{121}\arctan\left(\frac{\sqrt{11}(2x+3)}{11}\right)+\frac{3}{x}-\frac{4(3x+10)}{11(x^2+3x+5)}+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración por sustitución de una nueva variable

Algunas integrales que contienen exponentes fraccionarios o radicales no se pueden integrar de manera inmediata; por lo anterior se hace una sustitución por una nueva variable, de tal modo que la integral que resulte se pueda integrar por alguno de los métodos estudiados.

Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de x

Una integral que contenga potencias fraccionarias de x, se puede transformar a otra mediante la sustitución:

$$x = w^n$$

Donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios.

Ejemplo

Demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + C$

Solución

Se obtiene el menor denominador común que en este caso es 4, por lo que la sustitución es:

$$x = w^4$$

Luego,

$$x^{\frac{1}{2}} = w^2,\ x^{\frac{1}{4}} = w \quad \text{y} \quad dx = 4w^3dw$$

Por tanto, la nueva integral resulta:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = \int \frac{4w^3dw}{w^2 - w}$$

Se integra,

$$\int \frac{4w^3}{w^2 - w}dw = 4\int\left(w + 1 + \frac{w}{w^2 - w}\right)dw = 4\int wdw + 4\int dw + 4\int \frac{wdw}{w^2 - w}$$

$$= \frac{4w^2}{2} + 4w + 4\int \frac{w\,dw}{w(w-1)}$$

$$= 2w^2 + 4w + 4\int \frac{dw}{w-1} + C$$

$$= 2w^2 + 4w + \ln|w - 1| + C$$

Pero $w = x^{\frac{1}{4}}$, se demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{1}{4}} + 4\ln\left|x^{\frac{1}{4}} - 1\right| + C$

Diferenciales que contienen potencias fraccionarias de $a + bx$

Una integral que contenga potencias fraccionarias de $a + bx$, se puede transformar en otra, mediante la sustitución:

$$a + bx = w^n$$

Donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes fraccionarios.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1 + (x+1)^{\frac{2}{3}}}dx = (x + 1) - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3\arctan\sqrt[3]{x+1} + C$

Solución

Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores de las potencias fraccionarias y se realiza el cambio,

$$x + 1 = w^3$$

donde $dx = 3w^2\,dw \quad \text{y} \quad (x+1)^{\frac{2}{3}} = w^2,$

Por tanto, la nueva integral resulta,

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx \quad \int \frac{w^2}{1+w^2}(3w^2dw) = 3\int \frac{w^4}{w^2+1}\,dw$$

Se resuelve la división y se integra:

$$3\int \frac{w^4}{w^2+1}\,dw = 3\int \left(w^2 - 1 + \frac{1}{w^2+1}\right)dw = 3\int w^2dw - 3\int dw + 3\int \frac{dw}{w^2+1}$$

$$= w^3 - 3w + 3 \text{ arc tan } w + C$$

$x + 1 = w^3$, entonces $w = (x+1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+1}$, por consiguiente se deduce que:

$$\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{1+(x+1)^{\frac{2}{3}}}\,dx = (x+1) - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \text{ arc tan } \sqrt[3]{x+1} + C$$

2 Demuestra que $\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$

Solución

La sustitución que se realiza es:

$$w^2 = x + 3$$

donde,

$$x + 1 = w^2 - 2,\ x + 2 = w^2 - 1 \quad \text{y} \quad dx = 2w\,dw$$

Por tanto, la nueva integral resulta:

$$\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = \int \frac{(w^2-2)}{(w^2-1)(w)}(2w\,dw) = 2\int \frac{w^2-2}{w^2-1}\,dw$$

Ahora bien, al resolver la división e integrar, se obtiene:

$$2\int \frac{w^2-2}{w^2-1}\,dw = 2\int \left(1 - \frac{1}{w^2-1}\right)dw = 2\int dw - 2\int \frac{dw}{w^2-1} = 2w - \ln\left|\frac{w-1}{w+1}\right| + C$$

$w^2 = x + 3$, entonces $w = \sqrt{x+3}$ y al sustituir se obtiene:

$$= 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1}\right| + C$$

Se racionaliza,

$$= 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$$

Por consiguiente, se comprueba que:

$$\int \frac{x+1}{(x+2)\sqrt{x+3}}\,dx = 2\sqrt{x+3} - \ln\left|\frac{x+4-2\sqrt{x+3}}{x+2}\right| + C$$

EJERCICIO 17

Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \frac{3x^{\frac{1}{3}}dx}{1+x^{\frac{2}{3}}}$

2. $\int \frac{x^{\frac{1}{5}}dx}{1+x^{\frac{3}{5}}}$

3. $\int \frac{x\,dx}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}$

4. $\int \frac{x}{3\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}}dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)}$

6. $\int \frac{x^{\frac{1}{6}}dx}{\sqrt{4+x^{\frac{1}{3}}}}$

7. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}$

8. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+2}$

9. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}-3}$

10. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2x^{\frac{1}{3}}+1}$

11. $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x}(x+5)}$

12. $\int \frac{dx}{(x-3)^{\frac{1}{2}}+(x-3)^{\frac{1}{4}}}$

13. $\int \frac{(t-1)\,dt}{t\sqrt{t+2}}$

14. Demuestra que $\int \frac{(x+2)^{\frac{1}{6}}\,dx}{\sqrt{(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}}$ equivale a:

$$\left[(x+2)^{\frac{1}{3}}+1\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{8(x+2)^{\frac{5}{6}}-10(x+2)^{\frac{1}{2}}+15(x+2)^{\frac{1}{6}}}{8}\right]-\frac{15}{8}\ln\left|(x+2)^{\frac{1}{6}}+\sqrt{(x+2)^{\frac{1}{3}}+1}\right|+C$$

15. Demuestra que $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{3}}}$ equivale a:

$$\sqrt[12]{x}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{7}{12}}-\frac{12}{7}x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{5}{12}}-\frac{12}{5}x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{4}}-4x^{\frac{1}{6}}+6x^{\frac{1}{12}}-12\right)+12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}+1\right|+C$$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integración de las diferenciales binomias

Son aquellas integrales que contienen expresiones de la forma $x^w(a+bx^t)^{\frac{p}{q}}$ con $t > 0$ y se reducen mediante los cambios de variable que se indican:

Caso I

Si $\frac{w+1}{t} = L$ con $L \in Z$ su cambio de variable es:

$$u = (a+bx^t)^{\frac{1}{q}}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int \frac{x^2\,dx}{(4+x^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{4+x^3} + C$

Solución

En la integral se observa que

$$w = 2, t = 3, p = -1 \text{ y } q = 2$$

entonces,

$$\frac{w+1}{t} = \frac{2+1}{3} = 1, \quad 1 \in Z$$

Por tanto, el cambio de variable es:

$$u = (4+x^3)^{\frac{1}{2}} \quad \text{donde} \quad u^2 = 4 + x^3$$

Se despeja la variable x y se determina la diferencial,

$$x = (u^2-4)^{\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2}{3}u(u^2-4)^{-\frac{2}{3}}\,du$$

Al sustituir en la integral, se obtiene:

$$\int \frac{x^2dx}{(4+x^3)^{\frac{1}{2}}} = \int x^2(4+x^3)^{-\frac{1}{2}}dx = \int (u^2-4)^{\frac{2}{3}}(u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}u(u^2-4)^{-\frac{2}{3}}\,du$$

$$= \frac{2}{3}\int du = \frac{2}{3}u + C$$

Pero

$$u = (4+x^3)^{\frac{1}{2}}$$

por consiguiente:

$$\int \frac{x^2dx}{\left(4+x^3\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}\sqrt{4+x^3} + C$$

2 Comprueba que $\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$

Solución

En esta integral

$$w = 3,\ t = 2,\ p = -1 \text{ y } q = 3$$

entonces

$$\frac{w+1}{t} = \frac{3+1}{2} = 2\,,\ 2 \in Z$$

El cambio de variable es,

$$u = (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{donde} \quad u^3 = 1 + x^2$$

Se despeja la variable x y se determina la diferencial,

$$x = (u^3-1)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad dx = \frac{3u^2}{2\sqrt{u^3-1}}\,du$$

Se sustituye en la integral y se obtiene:

$$\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}dx = \int (u^3-1)^{\frac{3}{2}}(u^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{3u^2}{2\sqrt{u^3-1}}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\int (u^3-1)u\,du = \frac{3}{10}u^5 - \frac{3}{4}u^2 + C$$

Pero $u = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$, por tanto, al sustituir y simplificar el resultado

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{10}(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{5}(x^2+1) - \frac{1}{2}\right) + C$$

$$= \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}(2x^2-3)}{20} + C$$

Caso II

Si $\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q}=L$, $L \in Z$ el cambio de variable es:

$$u=\left(\frac{a+bx^t}{x^t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ejemplo

Demuestra que:

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=-\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x}+C$$

Solución

En esta integral

$$w=-2,\ t=4,\ p=-3 \text{ y } q=4$$

entonces,

$$\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q} = \frac{-2+1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$$

Por consiguiente, el cambio de variable es,

$$u=\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{donde} \quad x=\frac{1}{\sqrt[4]{u^4-1}} \quad \text{y} \quad dx=\frac{-u^3\,du}{\left(u^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}$$

Al sustituir en la integral se obtiene,

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}=\int x^{-2}(1+x^4)^{-\frac{3}{4}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{u^4-1}}\right)^{-2}\left(\frac{u^4}{u^4-1}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{-u^3du}{\left(u^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}\right)=-\int du=-u+C$$

Pero $u=\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}$, entonces de acuerdo con el resultado anterior

$$\int\frac{dx}{x^2(1+x^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{x} + C$$

EJERCICIO 18

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{y^3\,dy}{(2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$

2. $\int x^3\sqrt{7-5x^2}\,dx$

3. $\int \frac{x^5\,dx}{(9+x^3)^{\frac{5}{4}}}$

4. $\int x^3(3+4x^2)^{\frac{2}{3}}\,dx$

5. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

6. $\int \frac{(4+3x^4)^{\frac{3}{2}}dx}{x}$

7. $\int \frac{5\,dx}{x(x^5+16)^{\frac{1}{4}}}$

8. $\int \frac{dx}{x^2(4-x^4)^{\frac{3}{4}}}$

9. $\int x^2(3+x)^{\frac{5}{3}}\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Transformaciones de diferenciales trigonométricas

Aquellas integrales que tengan una forma racional, cuyos elementos sean funciones trigonométricas seno y coseno, se emplean las siguientes sustituciones, mediante la transformación:

De la identidad trigonométrica,

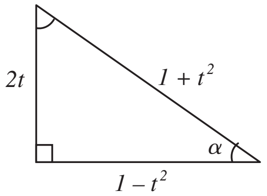
$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Se realiza el cambio $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$

$$t^2=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Se despeja cos α, $\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dada la función trigonométrica cos α, se completa el triángulo rectángulo de la siguiente figura:



Por tanto, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$ $\quad\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

luego, $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=t$ entonces $d\alpha=2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{d\alpha}{3-2\cos\alpha}$

Solución

Se emplea el cambio

$$d\alpha = 2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

se sustituye en la integral

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3-2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{5t^2+1}{1+t^2}}dt = 2\int \frac{dt}{5t^2+1} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{5}\ \text{arc tan}\left(\sqrt{5}\ t\right)\right] + C$$

Pero $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, por tanto, se deduce que,

$$\int \frac{d\alpha}{3-2\cos\alpha} = \frac{2}{5}\left[\sqrt{5}\ \text{arc tan}\left(\sqrt{5}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right] + C$$

2 Obtén el resultado de $\int \frac{d\theta}{5\text{sen}\,\theta - 1}$

Solución

Se sustituye

$$d\theta = 2\left(\frac{dt}{1+t^2}\right) \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

en la integral

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-1}dt = 2\int \frac{dt}{-t^2+10t-1} = -2\int \frac{dt}{(t-5)^2-24} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{t-2\sqrt{6}-5}{t+2\sqrt{6}-5}\right| + C$$

Pero $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, por tanto, se concluye que,

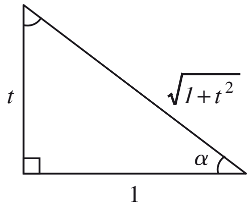
$$\int \frac{d\theta}{5\,\text{sen}\,\theta - 1} = -\frac{\sqrt{6}}{12}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)-2\sqrt{6}-5}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)+2\sqrt{6}-5}\right| + C$$

Fórmulas equivalentes de transformación

Otro cambio que se emplea en las integrales en forma racional que contienen funciones trigonométricas seno y coseno es:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \tan\alpha = t \quad \text{y} \quad d\alpha = \frac{dt}{1+t^2}$$

Cuyo triángulo es,



Se recomienda utilizar estas sustituciones cuando se tienen las expresiones: $\text{sen}^2\,\alpha$, $\cos^2\alpha$ y $\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el resultado de $\int \frac{dy}{(5-\text{sen}\,y)(5+\text{sen}\,y)}$

Solución

La integral es equivalente a

$$\int \frac{dy}{25-\text{sen}^2 y}$$

Entonces,

$$dy = \frac{dt}{1+t^2}\ ;\ \text{sen}\,y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Al sustituir en la integral, se obtiene,

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{25-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{24t^2+25}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{24t^2+25} = \frac{\sqrt{6}}{60}\text{arc tan}\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}t\right)+C$$

Pero $\tan y = t$, por tanto, se concluye que,

$$\int \frac{dy}{(5-\text{sen}\,y)(5+\text{sen}\,y)} = \frac{\sqrt{6}}{60}\text{arc tan}\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\tan y\right)+C$$

2 ••• Determina el resultado de $\int \frac{(\tan^3 x+1)\,dx}{3\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen}^2 x}$

Solución

Se sustituyen las equivalencias en la integral y se simplifican:

$$\int \frac{\left(\tan^3 x+1\right)dx}{3\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{\left(t^3+1\right)\left(\frac{dt}{1+t^2}\right)}{3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)+\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}$$

$$= \int \frac{\frac{(1+t^3)}{1+t^2}dt}{\frac{3}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{(1+t^3)}{1+t^2}dt}{\frac{3-2t+t^2}{1+t^2}} = \int \frac{(t^3+1)\,dt}{t^2-2t+3}$$

La integral resultante se expresa de la siguiente manera,

$$\int \frac{(t^3+1)dt}{t^2-2t+3} = \int\left(t+2+\frac{t-5}{t^2-2t+3}\right)dt$$

Se resuelve cada una de las integrales,

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \int \frac{t-1-4}{t^2-2t+3}\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \int \frac{t-1}{t^2-2t+3}\,dt - 4\int \frac{dt}{t^2-2t+3}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right| - 4\int \frac{dt}{(t-1)^2+2}$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t + \frac{1}{2}\ln\left|t^2-2t+3\right| - 4\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{t-1}{\sqrt{2}} + C$$

Pero $t = \tan x$, entonces:

$$\frac{1}{2}\tan^2 x + 2\tan x + \frac{1}{2}\ln\left|\tan^2 x - 2\tan x + 3\right| - 2\sqrt{2}\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

EJERCICIO 19

Determina las siguientes integrales:

1. $\int \frac{d\theta}{4+5\cos\theta}$
2. $\int \frac{d\theta}{1+2\cos\theta}$
3. $\int \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha+8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$
4. $\int \frac{dx}{1-\cos x+\operatorname{sen}x}$
5. $\int \frac{3}{(1+\operatorname{sen}\beta)^2}\,d\beta$
6. $\int \frac{dw}{\operatorname{sen}w+\cos w-1}$
7. $\int \frac{d\theta}{1-\operatorname{tg}\theta}$
8. $\int \frac{d\theta}{3\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}$
9. $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta+\operatorname{sen}2\theta}$
10. $\int \frac{d\theta}{4\sec\theta-1}$
11. $\int \frac{d\alpha}{6-3\operatorname{sen}\alpha+4\cos\alpha}$
12. $\int \frac{dx}{2+3\sec x}$
13. $\int \frac{1-\tan\beta}{1+\tan\beta}\,d\beta$
14. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}\,d\theta$
15. $\int \frac{3\operatorname{sen}\theta+4\cos\theta}{4\operatorname{sen}\theta-3\cos\theta}\,d\theta$
16. $\int \frac{dw}{\operatorname{sen}^2 w-5\operatorname{sen}w\cdot\cos w+\cos^2 w}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Capítulo 5

Aplicaciones de la integral

Reseña HISTÓRICA

Matemático francés, Cauchy fue pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

En 1814 publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Gracias a Cauchy el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual, toma el concepto de límite como punto de partida del análisis y elimina de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos ahora otorgan rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que queda eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangente.

Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Constante de integración

Dada la integral indefinida $\int f'(x)\,dx = F(x) + C$, representa la familia de funciones de $F(x)$ donde C recibe el nombre de constante de integración.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina la función cuya derivada sea e^{2x}

Solución

La derivada de la función que se busca es:

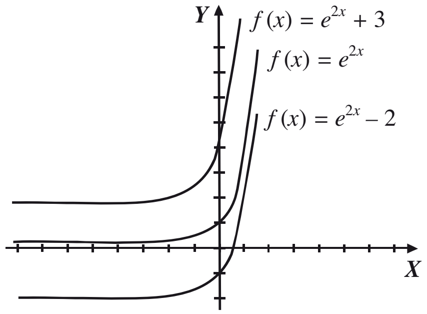
$$f'(x) = e^{2x}$$

Se integra $f'(x)$ para obtener $f(x)$

$$f(x) = \int e^{2x}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Si $C = -2, 0, 2$ se obtiene una famila de curvas para $f(x)$,



Finalmente, la función que se busca es: $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

2 Determina la ecuación de la curva, cuya pendiente de la recta tangente en el punto (4, 5) es $y' = \sqrt{2x+1}$

Solución

Se integra $y' = \sqrt{2x+1}$

$$y = \int \sqrt{2x+1}\,dx \quad \rightarrow \quad y = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Al sustituir las coordenadas del punto (4, 5) se obtiene el valor de C,

$$5 = \frac{(2(4)+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \quad \rightarrow \quad 5 = 9 + C \quad \rightarrow \quad C = -4$$

De acuerdo con el resultado anterior, la ecuación de la curva es:

$$y = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4$$

3 Encuentra la ecuación de la curva cuya pendiente de la recta tangente en el punto (3, 1) es igual a $2xy$

Solución

La derivada es implícita, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Ahora, se agrupan las variables,

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

Se integra la expresión y se obtiene:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx \quad \rightarrow \quad \ln y = x^2 + C$$

Al sustituir las coordenadas del punto (3, 1), se encuentra el valor de la constante de integración,

$$\ln 1 = 3^2 + C \quad \rightarrow \quad 0 = 9 + C \quad \rightarrow \quad C = -9$$

Por consiguiente, la ecuación de la curva es:

$$\ln y = x^2 - 9 \quad \rightarrow \quad y = e^{x^2-9}$$

4 Una motocicleta viaja a razón de $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y acelera a un ritmo de $(3t - 5)\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Determina la velocidad a la que viaja la motocicleta al transcurrir 4 segundos.

Solución

La aceleración se define como $\frac{dv}{dt} = a$, entonces, $dv = a\,dt$

Integrando esta expresión, se obtiene la velocidad v

$$\int dv = \int (3t-5)\,dt \quad \rightarrow \quad v = \frac{3}{2}t^2 - 5t + C$$

Para un tiempo inicial $t = 0$, la velocidad de la motocicleta es $10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, estos datos se sustituyen en la función para obtener el valor de C.

$$10 = \frac{3}{2}(0)^2 - 5(0) + C \quad \text{donde} \quad C = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por consiguiente, $v = \frac{3}{2}t^2 - 5t + 10$, luego, la velocidad de la motocicleta al cabo de 4 segundos es:

$$v = \frac{3}{2}(4)^2 - 5(4) + 10 = 14\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

EJERCICIO 20

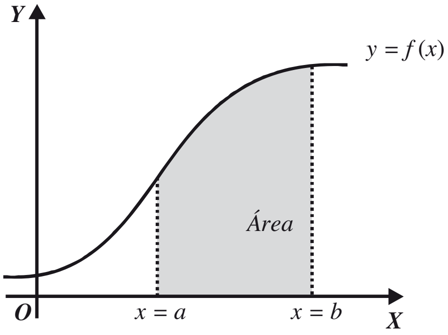
1. La pendiente de la recta tangente a una curva es $x + 3$. Obtén la ecuación de la curva si pasa por el punto (2, 4)
2. La derivada de una función está dada como $f'(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Encuentra $f(x)$ si ésta contiene al punto de coordenadas $(2\pi, 1)$
3. Una curva pasa por el punto $(3, e^3)$ y su derivada en este punto es igual a xe^x. Determina la ecuación de dicha curva.
4. Precisa la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\frac{2a}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y cuya derivada en este punto es $\frac{\sqrt{4a^2 - 9x^2}}{x^2}$
5. Determina la ecuación de la curva, cuya derivada es $\frac{dx}{dy} = 3y^2 - 4y$ cuando pasa por el punto $\left(-\frac{19}{8}, \frac{1}{2}\right)$
6. Obtén la ecuación de la curva que pasa por el punto $(-\ln 4, 1)$ y cuya derivada es $x' = -\frac{3y^2 - 12y + 3}{(2 - y)^2(y + 1)}$
7. Precisa la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(5, \frac{2}{3}\right)$ y cuya pendiente de la recta tangente en este punto es $y' = x\sqrt{x^2 - 9}$
8. Encuentra la ecuación de la curva que pasa por el punto $\left(\frac{5}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ y cuya derivada en dicho punto es $x' = \text{sen}^4 \frac{y}{2}$
9. La derivada de una función es $\frac{y + 3}{2 - x}$. Encuentra la función cuando pasa por el punto $(-3, -1)$.
10. La pendiente de la recta tangente a una curva en el punto (0, 4) es $\frac{2x^2 y}{x^2 + 1}$. Encuentra la ecuación de la curva.
11. La derivada de una función en el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ es $x^2 \text{ sen}^2 y$. Obtén la función.
12. Determina la función del desplazamiento de una partícula que lleva una velocidad constante de 11 m/s y al transcurrir 8 segundos se desplazó 73 m.
13. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba y 3 segundos después su velocidad es de 30.6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcula la velocidad del lanzamiento.
14. Una partícula parte del reposo y se mueve con una aceleración de $(t + 2)\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, para un tiempo de 4 segundos su velocidad es de 12 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determina la distancia recorrida en este tiempo.
15. En un proceso de enfriamiento, conforme transcurre el tiempo, la rapidez de pérdida de temperatura (T) es el cuádruplo de los t minutos transcurridos. Si al principio del proceso el material tenía una temperatura de 64º C, determina la temperatura al transcurrir t minutos.
16. Desde lo alto de un edificio se deja caer un objeto y tarda 6 segundos en llegar al suelo. Calcula la altura del edificio.
17. Desde la parte más alta de una torre se arroja hacia abajo un cuerpo con una velocidad de $8\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y tarda 3.2 segundos en tocar al suelo. Calcula la altura de la torre y la velocidad con la que choca el cuerpo contra el suelo.

    Nota: $g = 9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Integral definida

Representa el área que forma la función $f(x)$ con el eje X en el intervalo $[a, b]$.



Teorema fundamental

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

a = límite inferior
b = límite superior

Cálculo de una integral definida

a) Se integra la diferencial de la función.
b) Se sustituye la variable de la integral que se obtuvo, por los límites superior e inferior, y los resultados se restan para obtener el valor de la integral definida.

Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\left[F(b) - F(a)\right]$ donde c es una constante

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ con $c \in [a, b]$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $\int_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{2a^3}{3}$

Solución

Se integra, $\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a$

se sustituyen los límites

$$= \left[a^2(a) - \frac{a^3}{3}\right] - \left[a^2(0) - \frac{0^3}{3}\right] = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

2 Demuestra que: $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \frac{4}{3}$

Solución

Se integra y se sustituyen los límites,

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\right]_2^6 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3(6)-2} - \frac{2}{3}\sqrt{3(2)-2}\right] = \left[\frac{2}{3}(4) - \frac{2}{3}(2)\right] = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

3 Verifica que la integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi - 2}{8}$

Solución

Se integra la expresión

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Se sustituyen los límites

$$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2(0)\right]$$

$$= \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[0 - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(0)\right] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}$$

Finalmente tenemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{\pi - 2}{8}$$

4 Demuestra que: $\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$

Solución

Se integra por partes,

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int_1^e x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e$$

Se sustituyen los límites,

$$\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e = \left[\frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{1}{2}\right)\right] - \left[\frac{1^2}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{e^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

Por consiguiente,

$$\int_1^e x \ln x\, dx = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

5 Calcula el valor de la integral $\int_0^4 2^{\frac{x}{2}} dx$

Solución

Se integra y se sustituyen los límites:

$$\int_0^4 2^{\frac{x}{2}} dx = \left[\frac{2^{\frac{x}{2}+1}}{\ln 2}\right]_0^4 = \left[\frac{2^{\frac{4}{2}+1}}{\ln 2}\right] - \left[\frac{2^{\frac{0}{2}+1}}{\ln 2}\right] = \frac{8}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} = \frac{6}{\ln 2}$$

EJERCICIO 21

Determina el valor de las siguientes integrales:

1. $\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx$
2. $\int_{-2}^{2}(x+5)\,dx$
3. $\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x}+3x\right)dx$
4. $\int_{-1}^{2}(x^2-4x+3)dx$
5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\operatorname{sen}x\cos x\,dx$
6. $\int_{0}^{\pi}3\operatorname{sen}x\,dx$
7. $\int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{x^2-4}$
8. $\int_{e}^{4}\frac{dx}{2x}$
9. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx$
10. $\int_{-1}^{2}\frac{x\,dx}{x^2+4}$
11. $\int_{-2}^{3}e^{\frac{x}{2}}dx$
12. $\int_{1}^{5}xe^{x}dx$
13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^3 x\operatorname{sen}x\,dx$
14. $\int_{3}^{6}\frac{dx}{x^2-3x+2}$
15. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
16. $\int_{e}^{e^2}\frac{\cos(\ln x)dx}{x}$
17. $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$
18. $\int_{3}^{5}\frac{(7x-11)dx}{x^2-3x+2}$
19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$
20. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\tan^3(2x)\,dx$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Área bajo la curva

El área limitada por la curva $y = f(x)$ continua en $[a, b]$, el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$, es:

$$\text{Área} = \int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{b}y\,dx$$

El área limitada por la curva $x = f(y)$ continua en $[c, d]$, el eje Y y las rectas $y = c$, $y = d$, es:

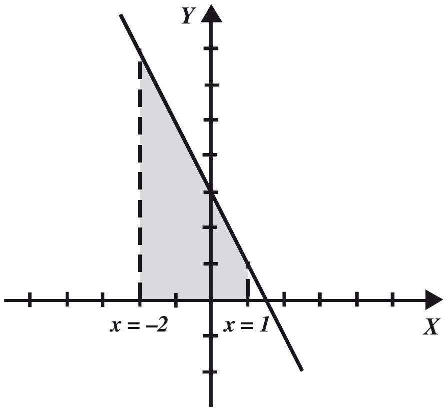
$$\text{Área} = \int_{c}^{d}f(y)\,dy=\int_{c}^{d}x\,dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Obtén el área limitada por la recta $y = -2x + 3$ desde $x = -2$ hasta $x = 1$

Solución



$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-2x+3)\,dx = \left[-x^2+3x\right]_{-2}^{1}$$

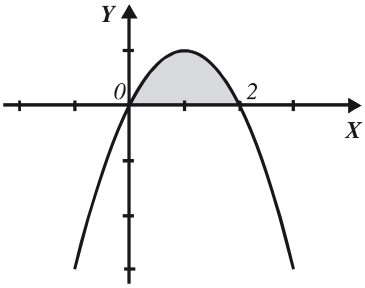
$$= [-(1)^2+3(1)] - [-(-2)^2+3(-2)]$$

$$= 2-(-10) = 12u^2$$

2 Encuentra el área comprendida entre la curva $y = 2x - x^2$ y el eje X

Solución

Se buscan los puntos de intersección de la curva con el eje X,



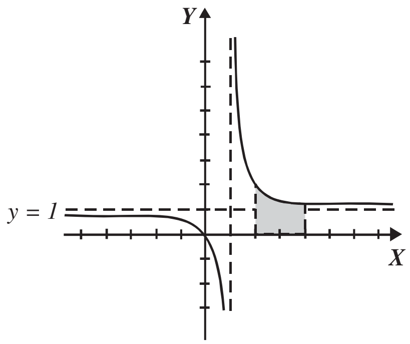
$$2x - x^2 = 0,\ x(2-x) = 0 \quad \text{donde} \quad x = 0,\ x = 2$$

$$\text{Área} = \int_{0}^{2} (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$\text{Área} = \left[(2)^2 - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[(0)^2 - \frac{(0)^3}{3}\right] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$$

3 Determina el área limitada por el eje X, la curva $f(x)=\frac{x}{x-1}$ y las rectas $x=2$ y $x=4$

Solución



$$\text{Área} = \int_2^4 \frac{x}{x-1}\,dx = \left[x+\ln(x-1)\right]_2^4$$

$$= [4+\ln(4-1)]-[2+\ln(2-1)]$$

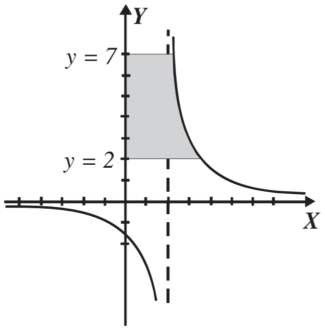
$$= 2+\ln(3) = 3.098\ u^2$$

4 Calcula el área limitada por la curva $f(x)=\frac{3}{x-2}$, limitada por el eje Y y las rectas $y=2$, $y=7$

Solución

Se despeja x de la función y se obtiene

$$x=\frac{3}{y}+2$$



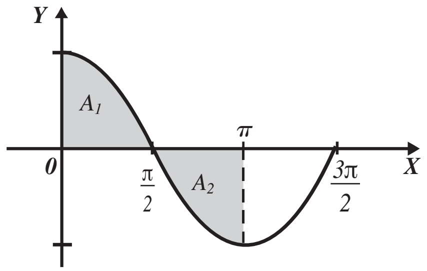
$$\text{Área} = \int_2^7 x\,dy = \int_2^7 \left(\frac{3}{y}+2\right)dy = \left[3\ln y+2y\right]_2^7$$

$$= \left(3\ln\left(\frac{7}{2}\right)+10\right)u^2$$

5 Encuentra el área limitada por el eje X, la función $f(x) = \cos x$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$

Solución

Se traza la gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Parte del área sombreada queda por debajo del eje X, así que se multiplica por -1

$$\text{Área}_T = A_1 - A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx$$

$$= [\text{sen } x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\text{sen } x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[\text{sen}\frac{\pi}{2} - \text{sen } 0\right] - \left[\text{sen } \pi - \text{sen}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 1 - [-1] = 1 + 1 = 2u^2$$

EJERCICIO **22**

Determina las áreas comprendidas entre las curvas y las rectas dadas.

1. $f(x) = 2x + 1, x = 1, x = 4$
2. $f(x) = x^2, x = 0, x = 3$
3. $f(x) = x^3, x = 2, x = 5$
4. $f(x) = \sqrt{x}, x = 0, x = 9$
5. $f(x) = 4 - x^2, x = -2, x = 2$
6. $f(x) = x^2 - 6x + 9, x = 3, x = 6$
7. $f(x) = \sqrt{x+3}, x = -3, x = 1$
8. $f(x) = \sqrt{x-2}, x = 2, x = 11$
9. $f(x) = \text{sen } x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$
10. $f(x) = x^2 - 2x + 1, x = -1, x = 3$
11. $x = \frac{1}{6}(5 - 4y - y^2)$, el eje Y
12. $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4$
13. $x = y - 1, y = 1, y = 5$
14. $y = 9 - x^2$, el eje X
15. $y = \frac{2}{x+1}, x = 0, x = 3$
16. $f(y) = y^3 - y, y = -1, y = 1$
17. $y = (a\,x)^3, x = -\frac{2}{a}, x = \frac{2}{a}$
18. $x = \frac{y-3}{y-2}, y = 3, y = 5$
19. $f(x) = x\sqrt{x^2-1}, x = 1, x = \sqrt{10}$
20. $y = \frac{x^2-1}{x^2+2}, x = 0, x = 4$
21. $x = \ln y, y = 1, y = 4$
22. $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}, x = 0, x = 1$

23. $x = \dfrac{2y}{\sqrt{9-y^2}}, y = 0, y = 2$

24. $y = 3 \text{ sen } 2x, x = 0, x = \pi$

25. $y = e^{2x}, x = 0, x = \dfrac{1}{2}$

26. $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}, x = -2, x = -1$

27. $x = \sqrt{4-y^2}, y = -2, y = 2$

28. $y = x^2 \cos x, x = -\dfrac{\pi}{2}, x = 0$

29. $x = \dfrac{3y-5}{y^2-2y-3}, y = 4, y = 6$

30. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-x-6}, x = 4, x = 6$

31. $x = ye^y, y = -2, y = 0$

32. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}, x = 4, x = 9$

33. $x = \dfrac{e^{\sqrt[3]{y}}}{\sqrt[3]{y^2}}, y = 1, y = 8$

34. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, x = -a, x = a$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmula de trapecios

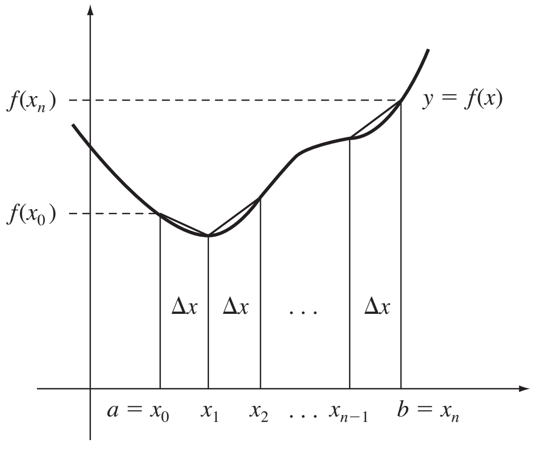
Determinada la función $y = f(x)$, el área aproximada que está limitada por la curva en el intervalo $[a, b]$ es:

$$A = \left(\frac{1}{2}f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + ... + \frac{1}{2}f(x_n)\right)\Delta x \quad \text{donde} \quad x_o = a, x_n = b$$

n = número de partes iguales en las que se divide el intervalo $[a, b]$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

es la longitud de cada parte.

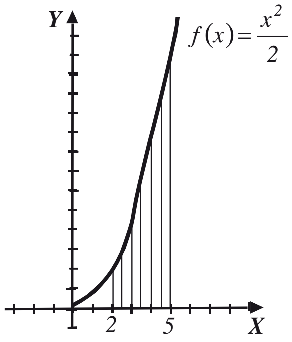


EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula $\int_{2}^{5}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$ utilizando la fórmula de trapecios, dividiendo el intervalo [2, 5] en 6 partes iguales.

Solución



Los datos son:

$$x_o = 2, n = 6, x_6 = 5$$

Con los cuales se obtiene la longitud de cada parte:

$$\Delta x = \frac{5-2}{6} = 0.5$$

Se determinan las ordenadas de los puntos mediante la función $y = \frac{x^2}{2}$,

x_n	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x_n)$	2	3.125	4.5	6.125	8	10.125	12.5

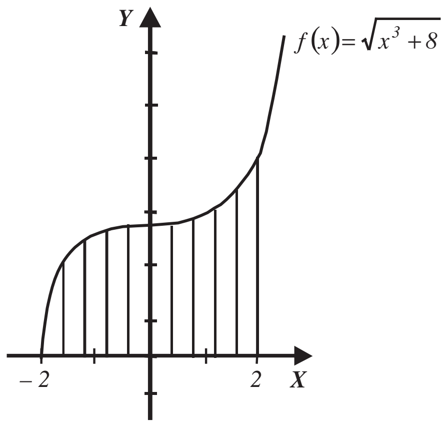
Se aplica la fórmula de trapecios para obtener el área en el intervalo [2, 5],

$$A = \left(\frac{1}{2}(2) + 3.125 + 4.5 + 6.125 + 8 + 10.125 + \frac{1}{2}(12.5)\right)(0.5)$$

$$A = 19.5625\ u^2$$

2 Evalúa la siguiente integral $\int_{-2}^{2}\sqrt{x^3+8}\,dx$ con $n = 10$ intervalos.

Solución



Los datos son:

$$x_0 = -2\,,\quad n = 10,\quad x_{10} = 2$$

Se obtiene el valor de Δx,

$$\Delta x = \frac{2-(-2)}{10} = 0.4$$

Se realiza la tabla para encontrar las ordenadas de x_n, sustituyendo en:

$$f(x)=\sqrt{x^3+8}$$

x_n	−2	−1.6	−1.2	−0.8	−0.4	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
$f(x_n)$	0	1.975	2.504	2.736	2.817	2.828	2.839	2.917	3.118	3.477	4

Se aplica la fórmula de área de trapecios,

$$A = \left(\frac{1}{2}(0)+1.975+2.504+2.736+2.817+2.828+2.839+2.917+3.118+3.477+\frac{1}{2}(4)\right)0.4$$

Por consiguiente, el área es 10.884 u^2

3 Encuentra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, x^2 dx$ tomando 5 intervalos.

Solución

De acuerdo con la integral se tienen los siguientes datos:

$$x_0 = 0, \quad x_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad n = 5$$

La longitud de cada trapecio está determinada por,

$$\Delta x = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{5} = \frac{\pi}{10}$$

Se realiza la tabulación para obtener las ordenadas de la función $f(x) = \text{sen}\, x^2$

x_n	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_n)$	0	−0.5877	−0.5877	0.5877	0.5877	0

Entonces, se concluye que,

$$\text{Área} = \left(\frac{1}{2}(0) + |-0.5877| + |-0.5877| + 0.5877 + 0.5877 + \frac{1}{2}(0)\right)\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.7385\ u^2$$

EJERCICIO 23

Utiliza la fórmula de trapecios para obtener las siguientes áreas:

1. $\int_1^3 x^2\, dx$ con $n = 5$

2. $\int_2^4 (2x - 1) dx$ con $n = 8$

3. $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^3}\, dx$ con $n = 4$

4. $\int_0^5 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+4}}\, dx$ con $n = 8$

5. $\int_1^3 \sqrt{\ln x}\, dx$ con $n = 8$

6. $\int_1^2 \sqrt{x^5 - \sqrt{x}}\, dx$ con $n = 5$

7. $\int_1^3 e^{x^2 - 1}\, dx$ con $n = 6$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Fórmula de Simpson $\frac{1}{3}$

Dada la función $y = f(x)$, el área limitada por la función y el eje X en el intervalo $[a, b]$ está determinada por:

$$\text{Área} = \frac{\Delta x}{3}(f(x_o) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + ... + f(x_n))$$

Donde:

$$x_o = a, \quad x_n = b, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad n = \text{número par de intervalos.}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Evalúa $\int_1^3 \sqrt{x}\, dx$ con $n = 4$ intervalos.

Solución

Los datos son:

$$x_o = 1, \quad x_4 = 3, \quad n = 4$$

Se determina el valor de Δx,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

Se sustituyen los valores de x_n en la función $y = \sqrt{x}$ para obtener las ordenadas,

x_n	1	1.5	2	2.5	3
$f(x_n)$	1	1.224	1.414	1.581	1.732

Por consiguiente,

$$\text{Área} = \frac{0.5}{3}(1 + 4(1.224) + 2(1.414) + 4(1.581) + 1.732)$$

$$\text{Área} = 2.796\, u^2$$

2 Evalúa $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}dx$ con $n = 6$ intervalos.

Solución

$x_0 = 0, \quad x_n = 2, \quad n = 6, \quad \Delta x = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3},$

entonces el área es:

$$\text{Área} = \frac{\frac{1}{3}}{3}(0 + 4(0.327) + 2(0.585) + 4(0.707) + 2(0.726) + 4(0.702) + 0.66)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{9}(10.226) = 1.136\, u^2$$

EJERCICIO 24

Utiliza el método de Simpson $\frac{1}{3}$ para evaluar las siguientes integrales:

1. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ con $n = 4$ intervalos
2. $\int_1^4 \sqrt[3]{x^5-2}\,dx$ con $n = 6$ intervalos
3. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,dx$ con $n = 8$ intervalos
4. $\int_0^8 \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+1}}{x+1}\,dx$ con $n = 6$ intervalos
5. $\int_0^{\pi} \cos x^2\,dx$ con $n = 4$ intervalos

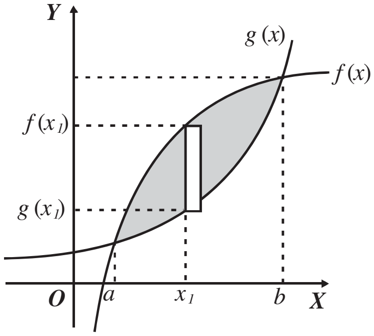
Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Área entre curvas planas

Rectángulos de base *dx*

El área comprendida entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, tomando rectángulos de base dx, está definida como:

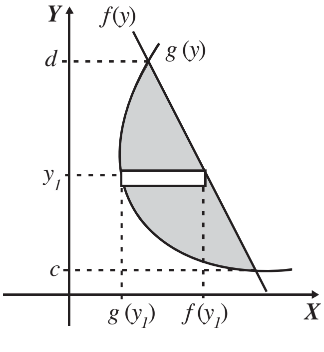
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$



Rectángulos de base *dy*

El área comprendida entre las curvas $f(y)$ y $g(y)$, tomando rectángulos de base dy, se define como:

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$



Es conveniente graficar las funciones para determinar la fórmula que se debe utilizar.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Determina el área limitada entre las curvas $y = x^3 + 1$ y $x - y + 1 = 0$

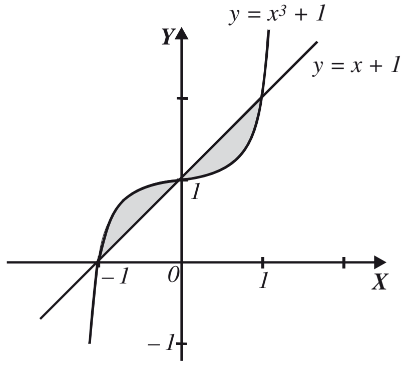
Solución

Se buscan los puntos de intersección de ambas curvas igualando las funciones:

$$x^3 + 1 = x + 1$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x(x - 1)(x + 1) = 0$$

Por consiguiente,

$$x = 0,\ x = 1 \ \text{ y } \ x = -1$$



Se eligen rectángulos verticales de base dx para calcular el área, por tanto,

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0}(y_1 - y_2)dx + \int_{0}^{1}(y_2 - y_1)dx \quad \text{siendo} \quad y_1 = x^3 + 1 \ \text{ y } \ y_2 = x + 1$$

$$= \int_{-1}^{0}[(x^3 + 1) - (x + 1)]\,dx + \int_{0}^{1}[(x + 1) - (x^3 + 1)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)\,dx$$

Pero

$$\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx = -\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx$$

entonces,

$$\text{Área} = \int_{0}^{1}(x - x^3)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = 2\int_{0}^{1}(x - x^3)dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{(1)^4}{4}\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}u^2$$

Finalmente, el área comprendida entre las curvas es $\frac{1}{2}u^2$

2 Obtén el área limitada por las curvas $y^2 = 4x$, $4x + y - 6 = 0$

Solución

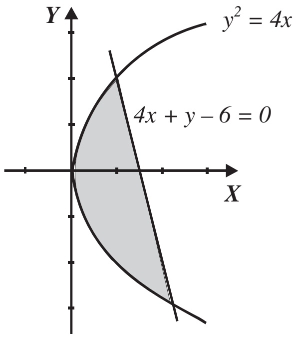
Se buscan las intersecciones de las curvas igualando los despejes en x,

$$\frac{y^2}{4} = \frac{6-y}{4}$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$$(y+3)(y-2) = 0$$

$$y = -3;\ y = 2$$



Se eligen rectángulos horizontales de base dy, para calcular el área, por tanto,

$$\text{Área} = \int_{-3}^{2} [x_1 - x_2]\, dx = \int_{-3}^{2} \left(\frac{6-y}{4} - \frac{y^2}{4} \right) dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-3}^{2} (6 - y - y^2) dy$$

$$= \frac{1}{4} \left[6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(6(2) - \frac{(2)^2}{2} - \frac{(2)^3}{3} \right) - \left(6(-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - \frac{27}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{125}{6} \right)$$

$$= \frac{125}{24} u^2$$

Finalmente, tenemos que el área comprendida por las curvas es $\frac{125}{24} u^2$

3 Encuentra el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ y $y^2 - 8x + 16 = 0$

Solución

Los puntos de intersección entre las curvas se obtienen al resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \\ y^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases}$$

Al multiplicar por -1 la segunda ecuación y sumar con la primera, se obtiene,

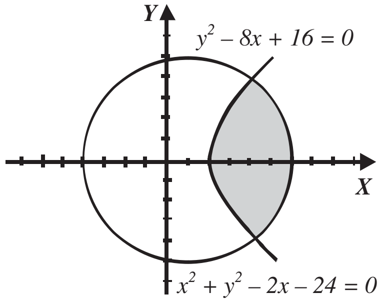
$$x^2 + 6x - 40 = 0 \quad \rightarrow \quad (x + 10)(x - 4) = 0 \quad \rightarrow \quad x = -10; x = 4$$

Se sustituye el valor de $x = 4$ en la ecuación de la parábola,

$$y^2 - 8(4) + 16 = 0$$
$$y^2 - 16 = 0$$
$$y = \pm 4$$

Por consiguiente, los puntos de intersección son los puntos (4, 4) y (4, -4) y el área está determinada por:

$$\text{Área} = \int_{-4}^{4} (x_2 - x_1)\, dx$$



Se despeja x de ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0 \qquad\qquad y^2 - 8x + 16 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 = 24 - y^2 + 1 \qquad\qquad -8x = -y^2 - 16$$
$$(x-1)^2 = 25 - y^2 \qquad\qquad x = \frac{y^2 + 16}{8}$$
$$x - 1 = \sqrt{25 - y^2}$$
$$x = \sqrt{25 - y^2} + 1$$

Al final se sustituyen en la fórmula del área:

$$A = \int_{-4}^{4}\left[\left(\sqrt{25 - y^2} + 1\right) - \left(\frac{y^2 + 16}{8}\right)\right] dy = \int_{-4}^{4}\left(\sqrt{25 - y^2} - \frac{y^2}{8} - 1\right) dy$$
$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{25 - y^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\,\frac{y}{5} - \frac{y^3}{24} - y\right]_{-4}^{4}$$
$$= \left[\frac{4}{2}\sqrt{25 - 4^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{4^3}{24} - 4\right] - \left[\frac{-4}{2}\sqrt{25 - (-4)^2} + \frac{25}{2}\text{arc sen}\left(\frac{-4}{5}\right) - \frac{(-4)^3}{24} - (-4)\right]$$
$$= [6 + 11.59 - 2.66 - 4] - [-6 - 11.59 + 2.66 + 4] = 21.86\, u^2$$

EJERCICIO 25

Obtén el área limitada entre las siguientes curvas:

1. $y = x^2$; $y = x + 2$
2. $x = y^3$; $x^2 + y = 0$
3. $y = 4x - x^2$; $y = x^2$
4. $y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$; $y = 2x + 3$
5. $4x^2 - 17x - 15y + 30 = 0$; $y = \sqrt{x+4}$
6. $x^2 + y^2 = 18$; $x^2 = 6y - 9$
7. $x^2 + y^2 = 25$; $y^2 - 8x + 8 = 0$
8. $5x^2 + 16y^2 = 84$; $4x^2 - y^2 = 12$
9. $3x^2 + 16y - 48 = 0$; $x^2 + y^2 = 16$
10. $y = x^3$; $y = \frac{3x}{x+2}$
11. $y^2 = x$; $xy^2 + 2x = 3$
12. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$; $x^2 + y^2 = 16$
13. $x = 9 - y^2$; $x = 1 - \frac{1}{9}y^2$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

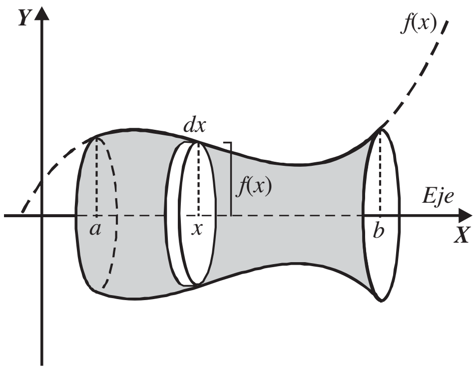
Volumen de sólidos de revolución

Se generan al girar un área plana en torno a una recta conocida como eje de rotación o revolución. Para calcular el volumen se puede utilizar cualquiera de los siguientes métodos.

Método de discos

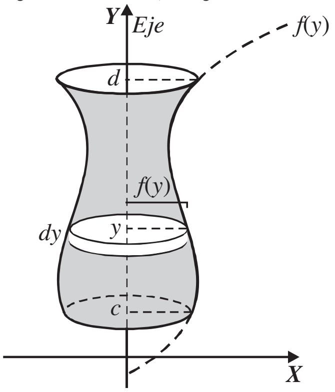
Se utiliza cuando el eje de rotación forma parte del contorno del área plana.

Eje de rotación, el eje X



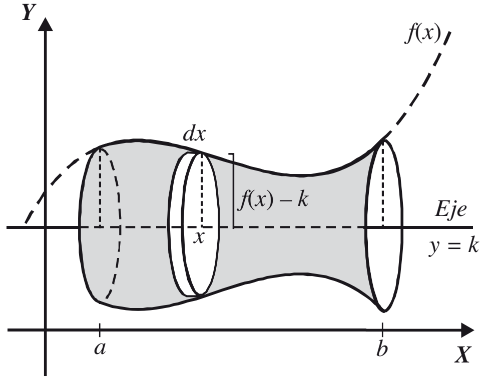
$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

Eje de rotación, el eje Y



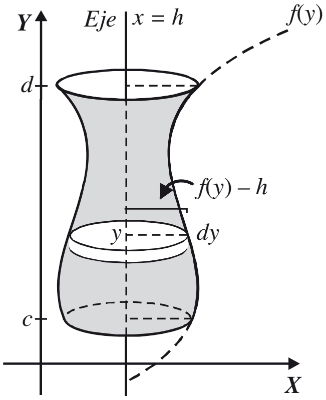
$$V = \pi\int_c^d [f(y)]^2\, dy$$

Eje de rotación, la recta $y = k$



$$V = \pi\int_a^b [f(x) - k]^2\, dx$$

Eje de rotación, la recta $x = h$



$$V = \pi\int_c^d [f(y) - h]^2\, dy$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra el volumen que se genera al hacer girar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x - 2 = 0$ alrededor del eje X.

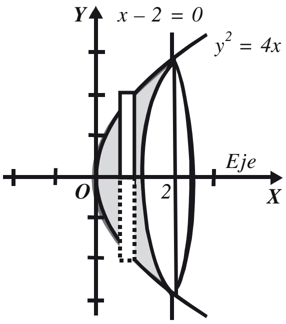
Solución

Al hacer girar el rectángulo de altura $f(x)$ y ancho dx alrededor del eje X, se forma un disco de volumen,

$$dV = \pi y^2\, dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = 2$, se obtiene el volumen del sólido,

$$V = \pi\int_0^2 y^2 dx = \pi\int_0^2 (4x)dx = \left[2\pi x^2\right]_0^2 = 8\pi u^3$$



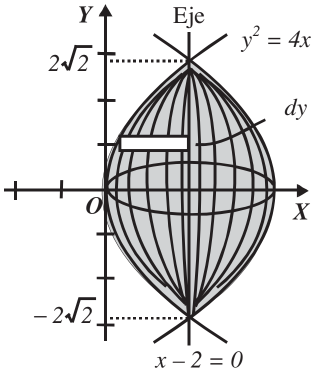
2 Encuentra el volumen generado al hacer girar el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ en torno a la recta $x - 2 = 0$

Solución

Para generar el sólido se deben girar los rectángulos alrededor del eje $x = 2$, que es paralelo al eje Y, por tanto el volumen de los discos es:

$$dV = \pi(2 - x)^2\, dy$$

Integrando desde $y = -2\sqrt{2}$ hasta $y = 2\sqrt{2}$ se obtiene el volumen del sólido.



$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}(2-x)^2 dy$ con $x = \dfrac{y^2}{4}$, sustituyendo y simplificando:

$$V = \pi\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(2 - \frac{y^2}{4}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(2 - \frac{y^2}{4}\right)^2 dy = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(4 - y^2 + \frac{y^4}{16}\right)dy$$

$$= 2\pi\left[4y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{80}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{128\sqrt{2}}{15}\pi u^3$$

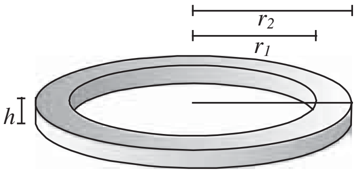
Método de las arandelas

Se emplea cuando el eje de rotación no es parte del contorno del área limitada por las curvas, esto significa que se generan sólidos de revolución con un hueco en el centro, al tipo de discos con hueco en el centro que se utilizan para hallar el volumen se denomina, arandela.

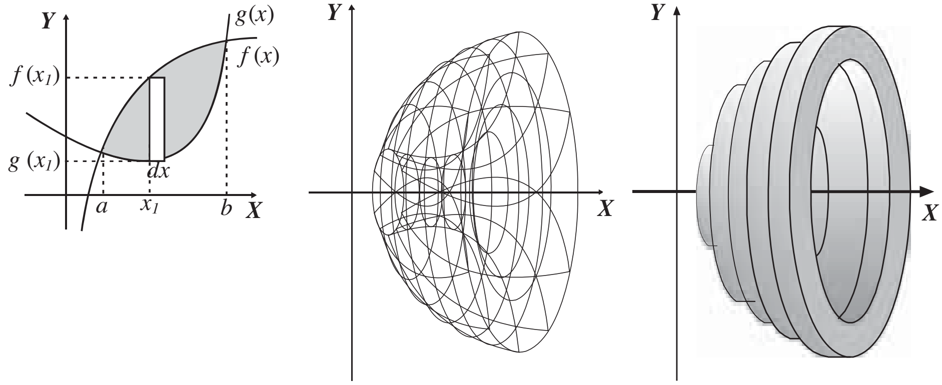
Volumen de una arandela

Sea V el volumen de la arandela, entonces se define como la diferencia de volúmenes de los cilindros de radio r_2 y r_1

$$V = V_1 - V_2 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h$$



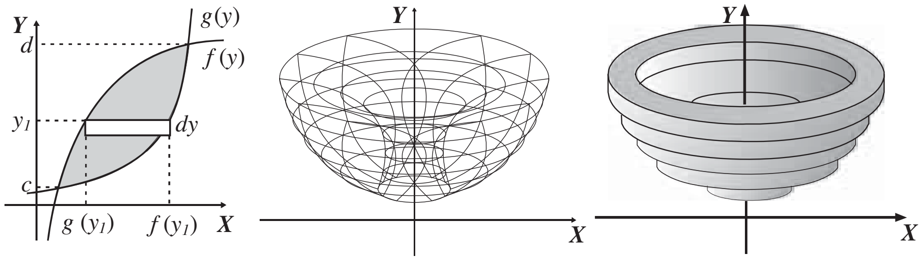
- **Eje de rotación horizontal**



El volumen generado en torno al eje X se define como:

$$V=\pi\int_a^b\left([f(x)]^2-[g(x)]^2\right)dx$$

- **Eje de rotación vertical**



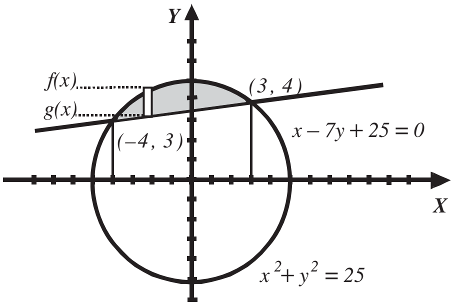
El volumen generado en torno al eje Y se define como:

$$V=\pi\int_c^d\left([f(y)]^2-[g(y)]^2\right)dy$$

Ejemplo

Determina el volumen que se genera al girar el área limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $x - 7y + 25 = 0$ en torno al eje X.

Solución



Se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener los puntos de intersección,

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad x - 7y + 25 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad y = \frac{x + 25}{7}$$

$$\pm\sqrt{25 - x^2} = \frac{x + 25}{7}$$

$$\left(\pm\sqrt{25 - x^2}\right)^2 = \left(\frac{x + 25}{7}\right)^2$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Por consiguiente, las abscisas de los puntos son $x = -4$ y $x = 3$, los cuales resultan ser los límites de integración. El eje de rotación no es parte del contorno de la superficie, por lo que se emplea la fórmula:

$$V = \pi\int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)dx$$

Donde $f(x)$ es la circunferencia y $g(x)$ la recta.
Al calcular el volumen se obtiene:

$$V = \pi\int_{-4}^{3}\left(\left[\pm\sqrt{25 - x^2}\right]^2 - \left[\frac{x + 25}{7}\right]^2\right)dx = \pi\int_{-4}^{3}\left(25 - x^2 - \frac{x^2 + 50x + 625}{49}\right)dx$$

$$= \pi\int_{-4}^{3}\left(\frac{600 - 50x - 50x^2}{49}\right)dx = \frac{50}{49}\pi\int_{-4}^{3}(12 - x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{50}{49}\pi\left[12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}$$

$$= \frac{50}{49}\pi\left[\left(12(3) - \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(12(-4) - \frac{(-4)^2}{2} - \frac{(-4)^3}{3}\right)\right]$$

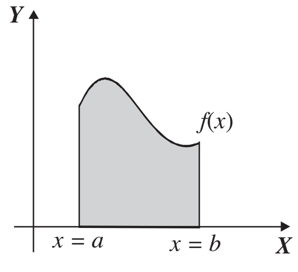
Por consiguiente, se deduce que el volumen es igual a: $V = \frac{175}{3}\pi\, u^3$

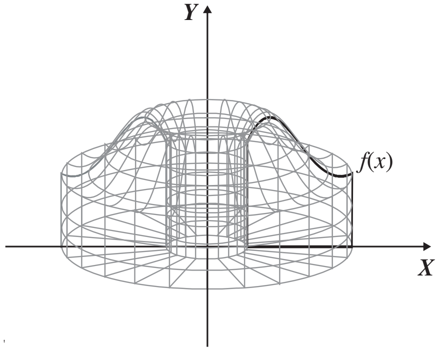
Método de capas

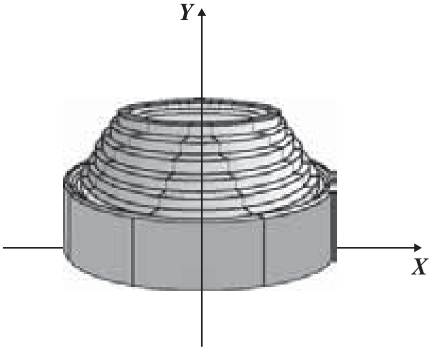
En este método el volumen de la capa se expresa en función de la circunferencia media, la altura y el espesor de la capa cilíndrica, engendrada al girar el rectángulo en torno al eje de rotación.

La gráfica de la derecha muestra el área comprendida por la función $y = f(x)$ con $f(x) > 0$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Al girarla sobre el eje Y se genera el sólido de revolución, éste se divide en n capas o casquetes cilíndricos, unos dentro de otros, con la finalidad de obtener el volumen del sólido.







El volumen de un casquete cilíndrico se define como el volumen del cilindro exterior menos el interior, entonces:

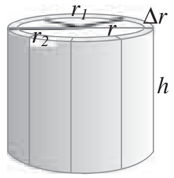
$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi h(r_2^2 - r_1^2)$$
$$= \pi h(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

pero

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad \text{y} \quad \Delta r = r_2 - r_1$$

entonces:

$$V = 2\pi r h \Delta r$$



Eje de rotación el eje "y"

En el plano cartesiano se elige el i-ésimo casquete cilíndrico de dimensiones $r = x_i$, $h = f(x_i)$ y $\Delta r = \Delta x$, al sumar los volúmenes de los n casquetes cilíndricos cuando n es muy grande se obtiene:

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x = 2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

Eje de rotación el eje "x"

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i f(y_i)\Delta y = 2\pi\int_c^d y\, f(y)\, dy$$

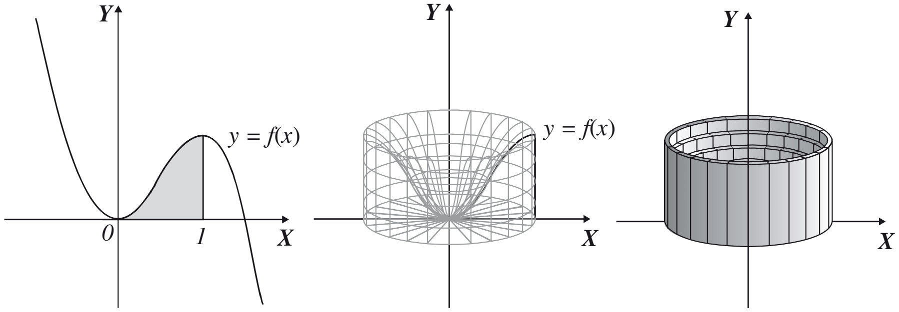
EJEMPLOS

Ejemplos

1 Utiliza el método de capas para hallar el volumen que se genera al girar sobre el eje Y el área limitada por la curva $y = 3x^2 - 2x^3$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Solución

Gráfica del área a rotar y del sólido de revolución seccionado en capas



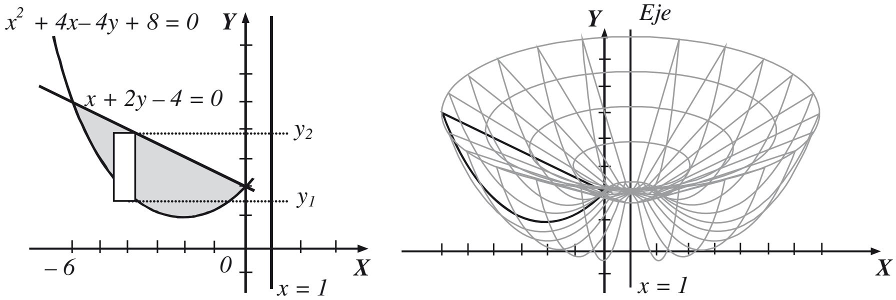
Luego, el volumen se define:

$$V = 2\pi\int_0^1 x(3x^2 - 2x^3)dx = 2\pi\int_0^1 (3x^3 - 2x^4)dx = 2\pi\left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 2\pi\left[\frac{3}{4}(1)^4 - \frac{2}{5}(1)^5\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{4} - \frac{2}{5}\right] = 2\pi\left[\frac{15-8}{20}\right] = 2\pi\left[\frac{7}{20}\right] = \frac{7}{10}\pi\, u^3$$

2 Obtén el volumen que genera el área plana acotada por la parábola $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ y la recta $x + 2y - 4 = 0$, al girar en torno a la recta $x - 1 = 0$

Solución



Para encontrar los puntos de intersección de la recta y la parábola se igualan las ordenadas y se resuelve la ecuación para x.

$$\frac{x^2 + 4x + 8}{4} = \frac{4 - x}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 + 6x = 0 \qquad x(x + 6) = 0$$

$$x = 0, x = -6$$

La altura del rectángulo está determinada por

$$y_2 - y_1 = \frac{4-x}{2} - \frac{x^2+4x+8}{4} = -\frac{6x+x^2}{4}$$

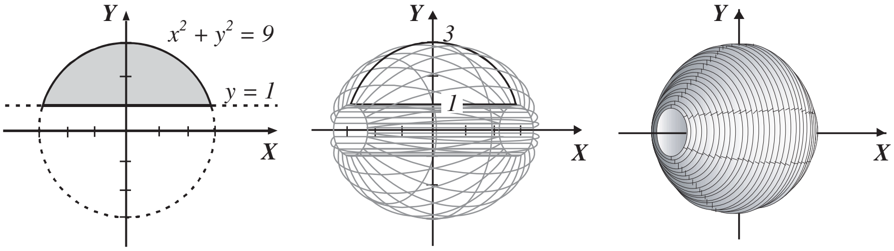
la distancia del rectángulo al eje de rotación es $(1 - x)$ y su ancho dx, al aplicar la fórmula se obtiene el volumen,

$$V = 2\pi\int_{-6}^{0}(1-x)\left(-\frac{6x+x^2}{4}\right)dx = \frac{2\pi}{4}\int_{-6}^{0}(x^3+5x^2-6x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^4}{4}+\frac{5x^3}{3}-3x^2\right]_{-6}^{0}$$

Finalmente, el volumen resulta ser: $V = 72\,\pi u^3$

3 Determina el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar sobre el eje X el área limitada por la curva $x^2 + y^2 = 9$ y la recta $y - 1 = 0$

Solución



El volumen se genera tanto en el lado positivo como en el lado negativo del eje X, por tanto:

$$V = 2\int_1^3 2\pi\, y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy = 4\pi\int_1^3 y\left(\sqrt{9-y^2}\right)dy$$

Se resuelve la integral:

$$V = 4\pi\left[-\frac{(9-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^3$$

Al evaluar se obtiene como resultado

$$V = 4\pi\left[-\frac{(9-9)^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{(9-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = 4\pi\left[\frac{16\sqrt{2}}{3}\right] = \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi u^3$$

EJERCICIO 26

Resuelve los siguientes problemas:

1. Determina el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ de 0 a 4 alrededor del eje X.
2. Calcula el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = \sqrt{x-2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 11$, alrededor del eje X.
3. Obtén el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = x^2$ y las rectas $x = 0$, $x = 3$ alrededor del eje X.
4. Determina el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 2$, $x = 0$ alrededor del eje Y.
5. Determina el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $f(x) = x^3$, y las rectas $x = 0$, $y = 8$, alrededor del eje Y.
6. Determina el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$, $y = 16$ alrededor del eje Y.
7. Determina el volumen que origina la superficie limitada por la parábola $y + x^2 = 0$ y la recta $y + 4 = 0$, al girar en torno del eje Y.
8. Obtén el volumen que se genera al rotar en torno al eje X el área limitada por la curva $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 0$.
9. Encuentra el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por la curva $y = \sqrt{x^2+1}$ y las rectas $x = -2$ y $x = 2$ en torno al eje X.
10. Determina el volumen que se genera al hacer girar la superficie limitada por la curva $x^2 - y^2 + 1 = 0$ y las rectas $y = 1.5$, $y = 3$ en torno al eje Y.
11. Precisa el volumen que se genera al rotar en torno al eje X la superficie limitada por la semielipse $9x^2 + 25y^2 - 54x - 144 = 0$ y el eje X.
12. Obtén el volumen generado al girar en torno al eje Y la superficie limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
13. Encuentra el volumen que se origina al girar en torno al eje X, la superficie limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
14. Determina el volumen generado por las curvas $x^2 + y^2 = 25$ y $y^2 - 6x + 15 = 0$, al girar en torno al eje Y.
15. Precisa el volumen que se genera al rotar en torno al eje X la superficie limitada por la curva $y = 4x - x^2$ y la recta $x - y = 0$
16. Calcula el volumen generado al rotar en torno al eje X, la superficie limitada por la parábola $x^2 - 6x - 8y + 17 = 0$ y la recta $x - 4y + 5 = 0$
17. Encuentra el volumen que se genera por la superficie limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, cuando gira en torno a la recta $x + 3 = 0$
18. Calcula el volumen que se genera al girar la superficie limitada por la parábola $y^2 + 4x - 6y - 11 = 0$, y la recta $2x + y - 9 = 0$, en torno a la recta $y + 1 = 0$
19. Obtén el volumen que se genera al rotar en torno a la recta $x - 2 = 0$, la superficie limitada por la curva $4x^2 + y^2 + 48x + 128 = 0$
20. Encuentra el volumen que se genera por la superficie limitada por la primera arcada de la función sen x, al girar en torno a la recta $2x - 3\pi = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Longitud de arco

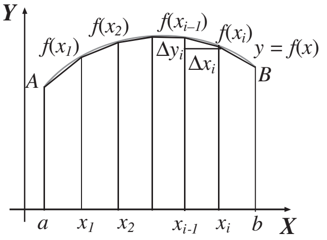
Sea la función $y = f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de arco se define como:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

Demostración

Se eligen n puntos del arco AB y se unen los puntos adyacentes mediante cuerdas, las cuales tendrán longitud Δs, la línea quebrada resultante tendrá longitud

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$



El límite al que tiende esta longitud cuando Δs_i tiende a cero es la longitud (L) del arco AB, siendo

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}} \;=\; \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i$$

y por el teorema del valor medio:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x)$$

para cualquier valor de x que cumpla $x_{i-1} < x < x_i$, entonces:

$$L = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\Delta x \;=\; \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

En forma semejante, si la curva tiene por ecuación $x = h(y)$, entonces la longitud de la curva está determinada por:

$$L = \int_c^d \sqrt{1+[h'(y)]^2}\, dy$$

EJEMPLOS

1 Determina la longitud del arco de la curva $y = x^2$, en el intervalo [2, 4]

Solución

Se deriva la función y se obtiene

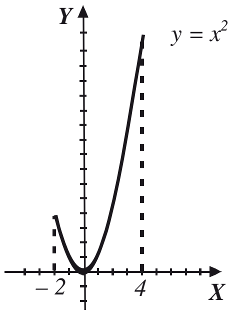
$$y' = 2x$$

Al sustituir en la fórmula,

$$L = \int_2^4 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_2^4 \sqrt{1+4x^2}\,d.$$

$$= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2x+\sqrt{1+4x^2}\right)\right]_2^4$$

$$= 2\sqrt{65} - \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\frac{8+\sqrt{65}}{4+\sqrt{17}} = 12.170\ u$$



2 Obtén la longitud del arco de la curva, cuya ecuación es $x = y^{\frac{3}{2}}$, entre los puntos (0, 0) y (64, 16)

Solución

Al derivar con respecto a Y se obtiene,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, se sustituye en la fórmula:

$$L = \int_0^{16} \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dy = \int_0^{16}\sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{16}\sqrt{4+9y}\,dy$$

$$= \left[\frac{\sqrt{(4+9y)^3}}{27}\right]_0^{16}$$

$$= 66.685\ u$$

EJERCICIO 27

Encuentra la longitud de arco en los intervalos dados de cada una de las siguientes curvas.

1. $y^2 = x^3$	$1 \leq x \leq 4$
2. $x = y^2$	$0 \leq x \leq 1$
3. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$	$1 \leq x \leq 4$
4. $f(x) = 4x^{\frac{3}{2}}$	$0 \leq x \leq 1$
5. $f(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$	$1 \leq x \leq 3$
6. $f(x) = \ln \cos x$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
7. $f(x) = \ln \text{sen}\, x$	$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
8. $y = \ln x^2$	$1 \leq x \leq 5$
9. $y = \ln x$	$\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$
10. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$	$2 \leq x \leq 5$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Aplicaciones a la economía

Función de costos

El costo total para producir, vender y distribuir un artículo es igual a la suma de los costos fijos más los costos variables.

$$C(x)_t = C_f + C_v$$

Los costos variables dependen del número de unidades x, mientras que los costos fijos no. Estos últimos permanecen constantes, algunos son el pago de la renta, el mantenimiento, y otros más en los cuales no importa si se produce, vende y distribuye una pieza, mil o cualquier otra cantidad y se representan, como:

$$C(x = 0) = C_f$$

El costo marginal es el costo para producir una unidad adicional más cuando ya se tiene un nivel de producción determinado y se expresa como la derivada del costo total respecto al número de unidades:

$$\text{Costo marginal} = \frac{dC(x)}{dx}$$

De forma contraria, si lo que se conoce es el costo marginal, entonces el costo total es la integral:

$$C = \int C'(x)\, dx$$

Cuando se resuelve esta integral se obtiene una constante de integración, la cual se puede conocer mediante las condiciones iniciales, la cual regularmente es equivalente a los costos fijos.

Ejemplo

El costo marginal que emplea un fabricante de pernos está dado por $\frac{dC(x)}{dx} = 302 - 0.04x$ y el costo fijo es de \$12. Obtén la función de costo total.

Solución

El costo total se obtiene resolviendo la integral:

$$C = \int (302 - 0.04x)\,dx$$

$$C = 302x - 0.02x^2 + K$$

Pero K, en realidad, son los costos fijos C_f, entonces:

$$C(x = 0) = 302(x) - 0.02(x)^2 + K,$$

pero se sabe que $C(x = 0) = C_f$, entonces:

$$C_f = 12 = K$$

Entonces la función del costo total es:

$$C(x) = 302x - 0.02x^2 + 12$$

Función de ingresos

La demanda de un producto se define como $p(x)$, mientras el ingreso total es el producto del precio, por el número de unidades x, que se venden.

$$I(x) = p(x) \cdot x$$

El ingreso marginal está en función de la cantidad demandada y matemáticamente se representa como la derivada del ingreso total, con respecto a la cantidad x

$$\text{Ingreso marginal} = \frac{dI(x)}{dx}$$

Si lo que se desea obtener es el ingreso total y se tiene el ingreso marginal, entonces se procede a efectuar una integración:

$$I(x) = \int I'(x)\,dx$$

En este caso, cuando se integra y se encuentra la constante ésta será siempre igual a cero, ya que si no se comercializa ninguna pieza x, no existirán ingresos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 La función del ingreso marginal al producir una bicicleta está dada por la función $\frac{dI(x)}{dx} = 3x^2 - 2x + 20$, determina la función del ingreso total y la función de demanda total.

Solución

El ingreso total se obtiene resolviendo la integral:

$$I(x) = \int (3x^2 - 2x + 20)dx$$

$$I(x) = x^3 - x^2 + 20x + C$$

Pero $I(x = 0) = 0$, por tanto, se obtiene el valor de C

$$I(x = 0) = (0)^3 - (0)^2 + 20(0) + C \quad \rightarrow \quad 0 = C$$

Entonces la función del ingreso total es:

$$I(x) = x^3 - x^2 + 20x$$

Para obtener la función de demanda se despeja a $p(x)$, de la relación:

$$I(x) = p(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad p(x) = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces, se obtiene:

$$p(x) = \frac{x^3 - x^2 + 20x}{x} = x^2 - x + 20$$

2 Una compañía manufacturera sabe que la función del ingreso marginal de un producto es $I'(x) = 20 - 0.002x$, en donde $I'(x)$ se cuantifica en pesos y x es el número de unidades.
Con base en la información antes mencionada, determina:

a) La función de ingresos totales
b) La función de la demanda del producto
c) Los ingresos totales al venderse 500 unidades
d) El precio, cuando se venden 3 500 artículos

Solución

a) La función de los ingresos totales se obtiene al resolver la integral:

$$I(x) = \int (20 - 0.002x)\, dx$$
$$I(x) = 20x - 0.001x^2 + C$$

La condición $I(x = 0) = 0$, por tanto, se obtiene el valor de C

$$I(0) = 20(0) - (0.001)(0)^2 + C \quad \rightarrow \quad 0 = C$$

Entonces la función del ingreso total es:

$$I(x) = 20x - 0.001x^2$$

b) Para obtener la función de demanda se despeja a $p(x)$, de la relación:

$$I(x) = p(x) \cdot x \quad \rightarrow \quad p(x) = \frac{I(x)}{x}$$

Entonces, se determina que:

$$p(x) = \frac{20x - 0.001x^2}{x} = 20 - 0.001x$$

c) Para determinar los ingresos totales al venderse 500 artículos, se sustituye en:
$I(x) = 20x - 0.001x^2$
$I(500) = 20(500) - (0.001)(500)^2$
$I(500) = 10\,000 - 250$
$I(500) = \$\,9\,750$

d) Si se desea obtener el precio, cuando se venden 3 500 unidades, se sustituye en:
$p(x) = 20 - 0.001x$
$p(3\,500) = 20 - 0.001(3\,500)$
$p(3\,500) = 20 - 3.5$
$p(3\,500) = \$16.5$

EJERCICIO 28

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. El costo marginal para producir un perno metálico está dado por $C'(x) = 20 - x - x^2$, además se sabe que el costo fijo es \$4.00
   Determina:
   a) La función de costo total
   b) El costo de producir 5 unidades

2. La función del ingreso marginal de un cierto producto es $I'(x) = 3x^2 - 2x + 5$, determina la función de ingreso total.

3. La función $f(x) = 4e^{0.005x}$, representa el costo marginal de producción de un buje de cobre, en donde los costos fijos están dados por $C_f = \$200.00$. Obtén:
   a) La función del costo total
   b) El costo cuando se producen 500 piezas

4. El ingreso marginal que tiene registrado un productor de bicicletas de montaña es: $I'(x) = 8 + 3(2x - 3)^2$, determina la función del ingreso total y la demanda.

5. El gerente de una empresa productora de dulces sabe que su costo marginal está dado por la función

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{5}{\sqrt{2x+1}},$$

   además sabe que el costo de producir 40 dulces, es \$53.00.
   Encuentra:
   a) La función del costo total
   b) El costo de fabricar 220 piezas

6. Una máquina de coser industrial se deprecia en función del tiempo t, según la función $P'(t) = -\frac{8160}{(3t+2)^2}$.
   Determina:
   a) La función del precio $P(t)$, de la máquina, t años después de su adquisición
   b) ¿Cuál es su valor después de 5 años?

7. Una compañía deprecia una computadora en función del tiempo t medido en años, según la función

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{24\,000}{(t+3)^4}$$

   en donde $P(t)$, es el precio de la máquina t años después de su adquisición. ¿Cuál es su valor después de 2 años?

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

CAPÍTULO 6

ECUACIONES DIFERENCIALES

Reseña HISTÓRICA

Inventó un método para determinar aproximadamente el tiempo de un fósil. Su teoría (de la datación o fechamiento con radiocarbono), está basada en que la razón de la cantidad de carbono 14 al carbono ordinario es constante de tal forma que la cantidad proporcional absorbida por los organismos vivos es igual que la de la atmósfera. Por lo que cuando muere un organismo la absorción de este elemento cesa y empieza a desintegrarse (vida media de un material radiactivo).

De tal forma que solo basta con comparar la cantidad de carbono 14 presente en el fósil, con la relación constante que existe en la atmósfera. Con base en la vida media del carbono que es aproximadamente de 5600 años se plantea la variación de una cantidad inicial C_0 de carbono 14 en el fósil con respecto al tiempo, obteniendo una ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{dC_0}{dt} = kC_0 \quad \text{en donde} \quad C_0 = C_0(0)$$

La cual resolveremos en este capítulo.

Willard Libby
(1908-1980)

Introducción

Casi cualquier problema del mundo real se puede resolver mediante la formulación de un modelo matemático que, al resolverlo con los conocimientos adquiridos (en particular de cálculo), permita obtener conclusiones matemáticas, las cuales posteriormente nos permitirán hacer una interpretación acerca del fenómeno sobre el cual gira el problema y entonces podremos hacer predicciones sobre el mismo. Estas predicciones siempre se deben verificar con los datos nuevos que se derivan de la práctica. Es decir, si las predicciones no coinciden con los datos nuevos, entonces hay que ajustar el modelo.

La mayoría de estos problemas a resolver surgen en la física, la química y las ciencias sociales (crecimiento de población, decaimiento radiactivo, problemas donde interviene la velocidad y la aceleración, antigüedad de un fósil, etc.…). En muchas ocasiones, cuando se utiliza el cálculo, es porque se presenta una ecuación diferencial surgida del modelo encontrado, por esta razón una de las aplicaciones más importantes del cálculo son, sin duda, las ecuaciones diferenciales.

En este capítulo sólo se dará una introducción a las ecuaciones diferenciales (definición, clasificación, algunos métodos de solución y ejemplos de aplicación); es decir, no se pretende dar un curso completo, sólo haremos referencia a lo básico para que el alumno posteriormente pueda iniciar un curso formal de ecuaciones diferenciales.

Definición

Una ecuación diferencial es aquella que tiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.

La representación de una ecuación diferencial en su forma general es:

$$F(x, y, y', y'' \cdot y''', ..., y^n) = 0$$

Con x variable independiente, $y = f(x)$ variable dependiente (en este caso la función desconocida), y', y'', y''', …, y^n, sus derivadas.

El **orden** de una ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

El **grado** de una ecuación diferencial es el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Por ejemplo:

Ecuación	Orden	Grado
$\frac{dy}{dx} - x = 7$	Primero	Primero
$2xy' - y = 6$	Primero	Primero
$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = -4y$	Segundo	Primero
$(y'')^2 + 2(y')^3 + 2y = x$	Segundo	Segundo
$2y''' - 4(y'')^2 - y' = 6x$	Tercero	Primero

Si una ecuación tiene una variable independiente se denomina ***ecuación diferencial ordinaria***, ya que sus derivadas son ordinarias.

Por ejemplo:

$$y' - 2x = 8 \qquad y'' - y' = x \qquad y''' - xy'' + 2y(y')^2 - xy = 0$$

Si una ecuación diferencial tiene dos o más variables independientes, se llama ecuación entre derivadas parciales, ya que las derivadas son parciales:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}t + \frac{\partial z}{\partial t} = xyt$$

La **solución** de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ que junto con sus derivadas sucesivas se transforma en una identidad al ser sustituidas en ella.

Ejemplo

Comprueba que $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$, es solución de la ecuación $3y - xy' + 3 = y'' + 3(2x + x^2)$

Solución

Se obtienen la primera y segunda derivada de $f(x)$

$y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ Función

$y' = f'(x) = 3x^2 + 6x + 6$ Primera derivada

$y'' = f''(x) = 6x + 6$ Segunda derivada

Se sustituyen y, y', y'' en la ecuación

$$3y - xy' + 3 = y'' + 3(2x + x^2)$$
$$3(x^3 + 3x^2 + 6x + 1) - x(3x^2 + 6x + 6) + 3 = (6x + 6) + 3(2x + x^2)$$
$$3x^3 + 9x^2 + 18x + 3 - 3x^3 - 6x^2 - 6x + 3 = 6x + 6 + 6x + 3x^2$$
$$3x^2 + 12x + 6 = 3x^2 + 12x + 6$$

Por tanto, $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ es solución de la ecuación.

Una **solución general** es una función de una variable que tiene un número de constantes arbitrarias no conocidas igual al orden de la ecuación y que al sustituirla en la ecuación se transforma en una igualdad.

Una **solución particular** es una función de una sola variable que se obtiene de la solución general, obteniendo el valor de sus constantes y que al sustituirla en la ecuación la transforma en una identidad.

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 5 - 2x$$

Determina cuál de las siguientes funciones es solución e indica de qué tipo es:

a) $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$

b) $y = -e^x - x + 1$

Solución

a) Se sustituye $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$ en la ecuación con sus respectivas derivadas y si se transforma en una igualdad, entonces sí es solución y será del tipo general.

$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1$

$y' = C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 1$

$y'' = C_1e^x + 4C_2e^{2x}$

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= (C_1e^x + 4C_2e^{2x}) - 3(C_1e^x + 2C_2e^{2x} - 1) + 2(C_1e^x + C_2e^{2x} - x + 1) \\ &= C_1e^x - 3C_1e^x + 2C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 6C_2e^{2x} + 2C_2e^{2x} + 3 - 2x + 2 \\ &= 5 - 2x \end{aligned}$$

C_1, C_2 son constantes no conocidas, por tanto es una solución general.

b) Se sustituye $y=-e^x-x+1$ en la ecuación con sus respectivas derivadas y si se transforma en una igualdad, entonces sí es solución y será particular.

$$y=-e^x-x+1$$

$$y'=-e^x-1$$

$$y''=-e^x$$

$$\begin{aligned} y''-3y'+2y &= (-e^x)-3(-e^x-1)+2(-e^x-x+1) \\ &= -e^x+3e^x-2e^x+3-2x+2 \\ &= 5-2x \end{aligned}$$

La solución tiene constantes definidas $C_1=-1$, $C_2=0$, por tanto es una solución particular.

Ecuación diferencial de primer orden

Ahora se resolverán algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden con el método de variables separables y homogéneas.

Al resolver ecuaciones diferenciales seguramente se necesitarán ciertos métodos de integración, por ello te sugerimos tomarte algunos minutos en repasar los capítulos anteriores.

Variables separables

La técnica más simple es la aplicada en una ecuación diferencial que se reduce a la forma:

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

Donde $M(x)$ es una función que depende de x y $N(y)$ es una función que depende de y. Con ello han sido separadas las variables, por lo cual la ecuación diferencial es del tipo de **variables separables**. Su solución se obtiene por integración directa:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C$$

Donde C es una constante arbitraria.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación $\frac{dy}{dx}=6x^2$

Solución

La ecuación se transforma a:

$$dy=6x^2\,dx$$

Se integran ambos miembros de la ecuación

$$\int dy=\int 6x^2dx$$

$$y=2x^3+C$$

Por consiguiente la solución es:

$$y=2x^3+C$$

2 Resuelve la ecuación $(1 + y^2)dx + xydy = 0$

Solución

Se trasponen los términos:

$$(1 + y^2)dx + xydy = 0$$

$$(1 + y^2)dx = -xydy$$

Se multiplica por $\frac{1}{x(1+y^2)}$ y se simplifica:

$$\frac{1}{x(1+y^2)}(1 + y^2)dx = \frac{1}{x(1+y^2)}(-xydy)$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{ydy}{1+y^2}$$

Se integra cada lado de la igualdad:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{ydy}{1+y^2} + C_1$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C_1$$

Se sustituye $C_1 = \ln C_2$

$$\ln x = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C_2$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln C_2$$

Se aplica la propiedad $\ln a^m = m \ln a$

$$\ln x + \ln\sqrt{1+y^2} = \ln C_2$$

Se aplica la propiedad $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln x\sqrt{1+y^2} = \ln C_2$$

$$x\sqrt{1+y^2} = C$$

$$\left(x\sqrt{1+y^2}\right)^2 = (C_2)^2$$

Se despeja y, se sustituye $(C_2)^2 = C$

$$x^2(1+y^2) = C$$

$$1 + y^2 = \frac{C}{x^2}$$

$$y^2 = \frac{C}{x^2} - 1 = \frac{C - x^2}{x^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{C-x^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{C-x^2}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{C-x^2}$$

Por tanto, la solución general es: $y = \frac{1}{x}\sqrt{C-x^2}$

3 Resuelve la ecuación $(y^2 + xy^2)\dfrac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0$

Solución

La ecuación se transforma en:

$$(y^2 + xy^2)\frac{dy}{dx} + x^2 - yx^2 = 0$$

Se factoriza cada término

$$y^2(1 + x)\frac{dy}{dx} + x^2(1 - y) = 0$$

$$y^2(1 + x)dy + [x^2(1 - y)]dx = 0$$

Se multiplica cada término por $\dfrac{1}{(1+x)(1-y)}$

$$\frac{1}{(1+x)(1-y)}[y^2(1 + x)]dy + \frac{1}{(1+x)(1-y)}[x^2(1 - y)]dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1-y}dy + \frac{x^2}{1+x}dx = 0$$

$$\frac{y^2}{1-y}dy = -\frac{x^2}{1+x}dx$$

Al integrar ambos miembros de la igualdad

$$\int\frac{y^2}{1-y}dy = -\int\frac{x^2}{1+x}dx$$

se divide y se obtiene que

$$\frac{y^2}{1-y} = -y - 1 + \frac{1}{1-y}$$

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Regresando a la integral

$$\int\left(-y-1+\frac{1}{1-y}\right)dy = -\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$-\int ydy - \int dy + \int\frac{dy}{1-y} = -\int xdx + \int dx - \int\frac{dx}{x+1}$$

$$-\frac{1}{2}y^2 - y - \ln|y - 1| = -\frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x + 1| + C_1$$

Se multiplica por 2

$$-y^2 - 2y - 2\ln|y - 1| = -x^2 + 2x - 2\ln|x + 1| + 2C_1$$

$$x^2 - y^2 - 2x - 2y + 2\ln|x + 1| - 2\ln|y - 1| = C$$

Al aplicar la propiedad $\ln a^m = m\ln a$ y al factorizar $x^2 - y^2$ se obtiene:

$$(x + y)(x - y) - 2(x + y) + \ln(x + 1)^2 - \ln(y - 1)^2 = C$$

Al aplicar la propiedad $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$$(x + y)(x - y) - 2(x + y) + \ln\frac{(x+1)^2}{(y-1)^2} = C$$

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\frac{(x+1)^2}{(y-1)^2} = C$$

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$$

Finalmente, la solución general es:

$$(x + y)(x - y - 2) + \ln\left(\frac{x+1}{y-1}\right)^2 = C$$

4 Resuelve $(1 + y^2)dx = xdy$

Solución

Se multiplica por el factor $\frac{1}{x(1+y^2)}$, cada término de la igualdad

$$\frac{1}{x(1+y^2)}(1 + y^2)dx = \frac{1}{x(1+y^2)}xdy$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1+y^2}$$

Al integrar se obtiene:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\ln|x| = \text{arc tan}(y) + C_1$$

Se aplica la definición de logaritmo natural, si $\ln b = c$, entonces $e^c = b$

$$x = e^{\text{arc tan}(y) + C_1}$$

$$x = e^{\text{arc tan}(y)} \cdot e^{C_1}$$

$$x = e^{\text{arc tan}(y)} \cdot C$$

$$x = Ce^{\text{arc tan}(y)}$$

Por tanto, la solución es:

$$x = Ce^{\text{arc tan}(y)}$$

Otra forma de representar la solución es la siguiente:

$$\ln|x| = \text{arc tan}(y) + C_1$$

$$\ln|x| - C_1 = \text{arc tan}(y)$$

Se sustituye $\ln C = -C_1$

$$\ln|x| + \ln C = \text{arc tan}(y)$$

Se aplica la propiedad $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln|Cx| = \text{arc tan}(y)$$

Se obtiene la tangente de cada término de la igualdad

$$\tan(\ln|Cx|) = \tan(\text{arc tan}(y))$$
$$\tan(\ln|Cx|) = y$$

Finalmente, la solución es:

$$\tan(\ln|Cx|) = y$$

5 Resuelve $e^{-y}(1 + y') = 1$

Solución

Se resuelve el producto

$$e^{-y}(1 + y') = 1$$
$$e^{-y} + e^{-y}y' = 1$$

La ecuación se transforma en:

$$e^{-y} + e^{-y}\frac{dy}{dx} = 1$$
$$e^{-y}\frac{dy}{dx} = 1 - e^{-y}$$
$$e^{-y}\,dy = (1 - e^{-y})dx$$
$$\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}} = dx$$

Se integra cada término de la igualdad

$$\int\frac{e^{-y}dy}{1-e^{-y}} = \int dx$$
$$\ln|1 - e^{-y}| = x + C_1$$
$$\ln|1 - e^{-y}| - C_1 = x$$
$$\ln|1 - e^{-y}| + \ln|C| = x$$
$$\ln|C(1 - e^{-y})| = x$$
$$C(1 - e^{-y}) = e^{x}$$

Por consiguiente, la solución es:

$$e^{x} = C(1 - e^{-y})$$

6 Determina la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

para la cual

$$y = 2$$

cuando

$$x = 0$$

Solución

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

$$2y\,dy = 3x^2\,dx$$

$$\int 2y\,dy = \int 3x^2 dx$$

$$y^2 = x^3 + C$$

En la solución general se sustituyen los valores de: $y = 2$, $x = 0$

$$y^2 = x^3 + C$$

$$(2)^2 = (0)^3 + C$$

Por tanto,

$$C = 4$$

Este resultado se sustituye en la solución general, se despeja y

$$y^2 = x^3 + C$$

$$y = \sqrt{x^3 + C}$$

$$y = \sqrt{x^3 + 4}$$

Por tanto, la ecuación particular es:

$$y = \sqrt{x^3 + 4}$$

7 Cerca de la superficie de la Tierra, la aceleración debida a la gravedad de un cuerpo que cae es de $9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, esto es posible si se desprecia la resistencia del aire. Si se arroja un cuerpo hacia arriba desde una altura inicial de 30 m, con una velocidad de $20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, determina su velocidad y su altura tres segundos más tarde.

Solución

La altura s se tomara positiva hacia arriba, entonces la velocidad v es positiva, pero la aceleración a es negativa ya que la atracción de la gravedad tiende a disminuir v, por tanto la solución esta dada por la ecuación diferencial.

$$\frac{dv}{dt} = -9.81$$

Con las condiciones iniciales

$$v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{y} \quad s = 30 \text{ m}$$

La ecuación $\frac{dv}{dt} = -9.81$, se resuelve por el método de variables separables, es decir:

$$\frac{dv}{dt} = -9.81$$

$$dv = -9.81\, dt$$

$$\int dv = -\int 9.81dt + C$$

$$v = -9.81t + C$$

En el instante $t = 0$, $v = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, entonces

$$v = -9.81t + C$$

$$20 = -9.81(0) + C$$

$$C = 20$$

Por tanto

$$v = -9.81t + 20$$

Luego, $v = \frac{ds}{dt}$, entonces se tiene una segunda ecuación diferencial.

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{ds}{dt} = -9.81t + 20$$

Al resolver la ecuación diferencial por variables separables resulta:

$$\frac{ds}{dt} = -9.81t + 20$$

$$\int ds = \int(-9.81t + 20)dt + K$$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + K$$

Se determina el valor de K, con los valores iniciales $s = 30$, $t = 0$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + K$$

$$30 = -\frac{9.81}{2}(0)^2 + 20(0) + K$$

Por tanto, $K = 30$, entonces la solución es:

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + 30$$

Finalmente se obtiene el valor de la velocidad y la altura 3 s más tarde.

$$v = -9.81t + 20 = -9.81(3) + 20 = -29.43 + 20 = -9.43\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s = -\frac{9.81}{2}t^2 + 20t + 30 = -\frac{9.81}{2}(3)^2 + 20(3) + 30 = (-4.905)(9) + 20(3) + 30 = -44.14 + 60 + 30 = 45.86\text{ m}$$

8 Se tiene un cultivo con una cantidad N_0 de bacterias, al pasar una hora el número de bacterias es de $\frac{5}{2}N_0$. Si la razón en la que se reproducen es proporcional al número de bacterias, ¿en cuánto tiempo se cuadriplicará la cantidad inicial de bacterias?

Solución

Si la razón de reproducción, la variación de N_0 respecto al tiempo $\left(\frac{dN_0}{dt}\right)$, es proporcional al número de bacterias, entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dN_0}{dt} = kN_0$$

La cual es una ecuación de variables separables, al resolverla se obtiene:

$$\frac{dN_0}{N_0} = kdt$$

$$\ln N_0 = kt + C_1$$

$$e^{kt+C_1} = N_0$$

$$N_0(t) = e^{kt+C_1}$$

$$N_0(t) = e^{kt}e^{C_1}$$

donde

$$N_0(t) = Ce^{kt}$$

Cuando $t = 0$ entonces $N_0(0) = Ce^{k(0)} = Ce^0 = C(1) = C$, pero sabemos que la cantidad inicial de bacterias es N_0, es decir $C = N_0$, por tanto $N_0(t) = N_0e^{kt}$.

Encontremos el valor de k, para eso tenemos que $N_0(1) = \frac{5}{2}N_0$, de donde

$$N_0e^{k(1)} = \frac{5}{2}N_0$$

$$N_0e^{k} = \frac{5}{2}N_0$$

Se divide entre N_0

$$e^k = \frac{5}{2}$$

Se aplica logaritmo natural en ambos lados

$$\ln e^k = \ln\frac{5}{2}$$

$$k = \ln\frac{5}{2}$$

$$k = 0.9163$$

Por tanto. la función solución a nuestro problema es $N_0(t) = N_0 e^{0.9163t}$
Si queremos saber en cuánto tiempo se cuadriplicará la población, entonces se plantea la siguiente igualdad:

$$4\,N_0 = N_0 e^{0.9163t}$$

Se divide entre N_0

$$4 = e^{0.9163t}$$

Se aplica el logaritmo natural en ambos miembros:

$$\ln 4 = \ln e^{0.9163t}$$

$$\ln 4 = 0.9163t$$

$$\frac{\ln 4}{0.9163} = t$$

$$t \approx 1.51$$

En aproximadamente 1.51 horas se cuadriplicará la población inicial.

9 Al analizar el hueso de un fósil se encontró que la cantidad de carbono 14 era la centésima parte de la cantidad original. ¿Cuál es la edad del fósil?

Solución

Existe un método basado en la cantidad de carbono 14 (C − 14) que existe en los fósiles. El químico Willard Libby inventó la teoría de la datación con radiocarbono, la cual se basa en que la razón de la cantidad de carbono 14 en la atmósfera es constante, lo que trae como consecuencia que la cantidad de este isótopo en los organismos es proporcional al que existe en la atmósfera. Al morir un organismo deja de absorber carbono 14, es decir la cantidad absorbida de este elemento cesa, y al ser un elemento radiactivo se va desintegrando (recuerda que la vida media de un elemento radiactivo es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de este elemento). Entonces basta con comparar la cantidad proporcional de carbono 14 en el fósil con la cantidad constante en la atmósfera. Para hacer esto se toma en cuenta la vida media del carbono 14 que es aproximadamente de 5600 años.

Ahora regresemos a nuestro problema: digamos que C_0 es la cantidad inicial de carbono 14 en el fósil, entonces la variación de esta cantidad respecto al tiempo es proporcional a la cantidad inicial, es decir:

$$\frac{dC_0}{dt} = kC_0$$

en donde

$$C_0 = C_0(0)$$

La ecuación diferencial obtenida es parecida al modelo del ejemplo 10, al resolverlo se obtiene:

$$C_0(t) = C_0e^{kt}$$

Para obtener el valor de k, consideremos que la vida media del carbono 14 es de 5600 años, esto quiere decir que:

$$\frac{C_0}{2} = C_0(5600)$$

$$\frac{C_0}{2} = C_0e^{5600k}$$

Se divide entre C_0

$$\frac{1}{2} = e^{5600k}$$

Se aplica el logaritmo natural en ambos miembros

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{5600k}$$

$$\ln\frac{1}{2} = 5600k$$

$$\frac{\ln\frac{1}{2}}{5600} = k$$

$$k = -0.00012378$$

Por tanto,

$$C_0(t) = C_0e^{-0.00012378t}$$

Si nos dicen que la cantidad de carbono 14 era la centésima parte de la cantidad original, entonces basta con plantear la siguiente igualdad.

$$\frac{C_0}{100} = C_0e^{-0.00012378t}$$

$$\frac{1}{100} = e^{-0.00012378t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = \ln e^{-0.00012378t}$$

$$\ln\frac{1}{100} = -0.00012378t$$

$$\frac{\ln\frac{1}{100}}{-0.00012378} = t$$

de donde

$$t \approx 37\,204$$

Por tanto, el fósil tiene aproximadamente 37 200 años.

EJERCICIO 29

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y(1-x^3)}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{5+y^2}$
4. $(4 - y^2)dx - (4 - x^2)dy = 0$
5. $(9 + y^2)dx + 4xy\,dy = 0$
6. $(2y^2 - xy^2)y' + 2x^2 - yx^2 = 0$
7. $x\sqrt{y^2-2}\,dx + y\sqrt{x^2-2}\,dy = 0$
8. $e^{3y}(y' + 3) = 2$
9. $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y \cos 2x$
10. $y' = \cos(x + y)$
11. $(-4y + y^2)dx + x(x - 6)dy = 0$
12. $4x^3 - y^3y' = 0$
13. $y' = \frac{2x+1}{y^3+1}$
14. $e^x dx - \frac{1}{y}dy = 0$
15. $\frac{3}{x}dx + \frac{2}{y}dy = 0$
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y - y}{y+4}$
17. $y' = x^2 \operatorname{sen} 2x$
18. $\frac{dy}{dx} = e^{2x-3y}$
19. $ydx + x\ln x dy = 0$
20. $(1 + e^x)e^y y' = y^{-1}$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente

Ecuaciones homogéneas

$f(x, y)$ es una función homogénea de grado n si $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$
Por ejemplo: $f(x, y) = 3x^4 - x^2y^2$ es homogénea, hagamos la evaluación:

$$f(\alpha x, \alpha y) = 3(\alpha x)^4 - (\alpha x)^3(\alpha y) = 3\alpha^4x^4 - \alpha^4x^3y = \alpha^4(3x^4 - x^3y) = \alpha^4 f(x, y)$$
$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^4 f(x, y)$$

por tanto es homogénea de grado 4.

Una ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se llama homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas.

Por ejemplo:
La ecuación $\frac{x^2}{y}\arccos\frac{x}{y}dy + x\ln\frac{x}{y}dx = 0$ es homogénea ya que para

$$M(x, y) = \frac{x^2}{y}\arccos\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad N(x, y) = x\ln\frac{x}{y}$$

se tiene que:

$$M(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2}{\alpha y}\arccos\frac{\alpha x}{\alpha y} = \frac{\alpha^2x^2}{\alpha y}\arccos\frac{x}{y} = \alpha\frac{x^2}{y}\arccos\frac{x}{y} = \alpha M(x, y)$$

$$N(\alpha x, \alpha y) = \alpha x\ln\frac{\alpha x}{\alpha y} = \alpha x\ln\frac{x}{y} = \alpha N(x, y)$$

Ambas son homogéneas de grado 1, por tanto, la ecuación $\frac{x^2}{y}\text{arc cos}\frac{x}{y}dy + x\ln\frac{x}{y}dx = 0$ es homogénea.

Para resolver una ecuación homogénea se utiliza la siguiente transformación:

$$y = vx \quad \text{de donde} \quad dy = vdx + xdv$$

Ejemplo

Resuelve la ecuación $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$

Solución

Sustituimos $y = vx$ de donde $dy = v\,dx + x\,dv$ en la ecuación:

$$(4x - 3(vx))dx + (2(vx) - 3x)(vdx + xdv) = 0$$

$$(4x - 3vx)dx + (2vx - 3x)(vdx + xdv) = 0$$

Se multiplica y simplifica:

$$4xdx - 3vxdx + 2v^2xdx + 2vx^2dv - 3xvdx - 3x^2dv = 0$$

$$(2v^2x - 3vx - 3vx + 4x)dx + (2vx^2 - 3x^2)dv = 0$$

$$(2v^2 - 6v + 4)xdx + (2v - 3)x^2dv = 0$$

$$2(v^2 - 3v + 2)xdx + (2v - 3)x^2dv = 0$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{x^2(v^2 - 3v + 2)}$

$$\frac{2(v^2 - 3v + 2)xdx}{x^2(v^2 - 3v + 2)} + \frac{(2v - 3)x^2dv}{x^2(v^2 - 3v + 2)} = 0$$

$$\frac{2dx}{x} + \frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 2} = 0$$

$$\frac{2dx}{x} = -\frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 2}$$

Se integra

$$2\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{(2v - 3)dv}{v^2 - 3v + 4}$$

$$2\ln x + C_1 = -\ln|v^2 - 3v + 2| + C_2$$

$$2\ln x + \ln|v^2 - 3v + 2| = C_2 - C_1$$

Se hace la sustitución $C_3 = C_2 - C_1$ y se aplican las propiedades $\ln a^n = n \ln a$,

$$\ln x^2|v^2 - 3v + 2| = C_3$$

Se aplica la definición de logaritmo $\ln b = c$ quiere decir $e^c = b$

$$x^2(v^2 - 3v + 2) = e^{C_3}$$

Se sustituye $C = e^{C_3}$

$$x^2(v^2 - 3v + 2) = C$$

De $y = vx$ se despeja v, $v = \dfrac{y}{x}$ para sustituirla en la función.

$$x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = C$$

$$x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2\right) = C$$

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{y}{x} + 2\right) = C$$

$$\frac{x^2y^2}{x^2} - \frac{3x^2y}{x} + 2x^2 = C$$

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = C$$

Se factoriza

$$(y - 2x)(y - x) = C$$

Por tanto, la solución es

$$(y - 2x)(y - x) = C$$

Existen ecuaciones que son lineales pero no homogéneas, aunque se pueden reducir a ellas, haciendo una traslación. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

En donde si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, la ecuación se reduce a la forma homogénea

$$(a_1x' + b_1y')dx' + (a_2x' + b_2y')dy' = 0$$

Al hacer una traslación por medio de las transformaciones:

$$x = x' + h \qquad dx = dx'$$

$$y = y' + k \qquad dy = dy'$$

(h, k) es el punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$
Si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, la ecuación se reduce a una ecuación de variables separables

$$P(x, t)dx + Q(x, t)dt = 0$$

Mediante la transformación $a_1x + b_1y = t$ de donde

$$dy = \frac{dt - a_1dx}{b_1}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Resuelve la ecuación

$$(2x - y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

Solución

Tenemos la ecuación

$$(2x - y + 4)dx + (3x + 2y - 1)dy = 0$$

En donde $(2)(2) - (3)(-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0$, por tanto resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$2x - y + 4 = 0$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

Al resolverlo se obtiene que el punto $(h, k) = (-1, 2)$, se sustituye en las fórmulas de transformación:

$$x = x' + h \qquad y = y' + k$$
$$x = x' - 1 \qquad y = y' + 2$$
$$dx = dx' \qquad dy = dy'$$

Posteriormente en la ecuación dada:

$$(2[x' - 1] - [y' + 2] + 4)dx' + (3[x' - 1] + 2[y' + 2] - 1)dy' = 0$$
$$(2x' - 2 - y' - 2 + 4)dx' + (3x' - 3 + 2y' + 4 - 1)dy' = 0$$
$$(2x' - y')dx' + (3x' + 2y')dy' = 0$$

Se obtuvo una ecuación homogénea y se sustituye $y' = vx'$ $dy' = vdx' + x'dv$

$$(2x' - vx')dx' + (3x' + 2vx')(vdx' + x'dv) = 0$$
$$2x'dx' - vx'dx' + 3x'vdx' + 3x'^2dv + 2v^2x'dx' + 2vx'^2dv = 0$$
$$2v^2x'dx' + 2vx'dx' + 2x'dx' + 2vx'^2dv + 3x'^2dv = 0$$
$$2(v^2 + v + 1)x'dx' + (2v + 3)x'^2dv = 0$$

Se multiplica por el factor: $\dfrac{1}{x'^2(v + v + 1)}$

$$\frac{2(v^2 + v + 1)x'dx'}{x'^2(v^2 + v + 1)} + \frac{(2v + 3)x'^2dv}{x'^2(v^2 + v + 1)} = 0$$

$$\frac{2dx'}{x'} = -\frac{(2v + 3)dv}{v^2 + v + 1}$$

Se integran ambos lados

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+3)dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1+2)dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-\int\frac{2dv}{v^2+v+1}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-2\int\frac{dv}{\left(v^2+v+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}}$$

$$2\int\frac{dx'}{x'}=-\int\frac{(2v+1)dv}{v^2+v+1}-2\int\frac{dv}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$2\ln x'+C_1=-\ln(v^2+v+1)-2\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{arc tan}\left(\frac{v+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]+C_2$$

$$2\ln x'+\ln(v^2+v+1)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tan}\left(\frac{\frac{2v+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right]=C_2-C_1$$

$$\ln x'^2(v^2+v+1)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tan}\left(\frac{2v+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

Al sustituir $v=\dfrac{y'}{x'}$

$$\ln x'^2\left(\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+\frac{y'}{x'}+1\right)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tan}\left(\frac{2\left(\frac{y'}{x'}\right)+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

$$\ln x'^2\left(\frac{y'^2}{x'^2}+\frac{y'}{x'}+1\right)+2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tan}\left(\frac{\frac{2y'+\sqrt{3}x'}{x'}}{\sqrt{3}}\right)\right]=C$$

$$\ln x'^2\left(\frac{y'^2+x'y'+x'^2}{x'^2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\text{arc tan}\left(\frac{2y'+\sqrt{3}x'}{\sqrt{3}x'}\right)=C$$

Se sustituye $x'=x+1$, $y'=y-2$

$$\ln(x+1)^2\left(\frac{(y-2)^2+(x+1)(y-2)+(x+1)^2}{(x+1)^2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\text{arc tan}\left(\frac{2(y-2)+\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{3}(x+1)}\right)=C$$

2 Resuelve la ecuación:

$$(x-2y-1)dx+(3x-6y+2)dy=0$$

Solución

En la ecuación se tiene que $(1)(-6)-(3)(-2)=-6+6=0$, entonces utilizamos la transformación:

$$a_1x+b_1y=t, \qquad dy=\frac{dt-a_1dx}{b_1}$$

$$x-2y=t, \qquad dy=\frac{dt-dx}{-2}=-\frac{dt-dx}{2}$$

Se sustituye en la ecuación:

$$(x-2y-1)dx+(3(x-2y)+2)dy=0$$

$$(t-1)dx+(3t+2)\left(-\frac{dt-dx}{2}\right)=0$$

$$tdx-dx-\frac{3}{2}tdt+\frac{3}{2}tdx-dt+dx=0$$

$$tdx-\frac{3}{2}tdt+\frac{3}{2}tdx-dt=0$$

$$2tdx-3tdt+3tdx-2dt=0$$

$$5tdx-(3t+2)dt=0$$

$$5tdx=(3t+2)dt$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t}(5tdx=(3t+2)dt)$$

$$5dx=3dt+\frac{2}{t}dt$$

Se integran ambos miembros

$$5\int dx=3\int dt+2\int\frac{dt}{t}$$

$$5x=3t+2\ln t+C$$

$$5x=3(x-2y)+2\ln(x-2y)+C_1$$

$$5x=3x-6y+2\ln(x-2y)+C_1$$

$$2x+6y-2\ln(x-2y)=C_1$$

Se multiplica por el factor $\frac{1}{2}$

$$x+3y-\ln(x-2y)=\frac{1}{2}C_1$$

Se sustituye $C=\frac{1}{2}C_1$

$$x+3y-\ln(x-2y)=C$$

Por tanto, la solución es:

$$x+3y-\ln(x-2y)=C$$

EJERCICIO 30

1. $xdy = (2x + 2y)dx$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3xy + y^2}{x^2}$
3. $xy\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + 2y^2$
4. $y' = \dfrac{x - y}{2x}$
5. $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} - 3\dfrac{x}{y}$
6. $(x^2 - y^2)y' = xy$
7. $(4x^2 - 5xy + y^2) + x^2y' = 0$
8. $(x^2 + y^2)y' = y^2$
9. $(2x - y)dy = (2y + x)dx$
10. $y' = \dfrac{y}{x} + 4\sec\dfrac{y}{x}$
11. $(x - y)y' + (y - 2x) = 0$
12. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$
13. $(x + y)y' + y = x$
14. $x\dfrac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}$
15. $(y^2 - 5xy)y' - (xy - 5x^2) = 0$
16. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$
17. $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$
18. $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0$
19. $(2x - 5y + 3)dx + (-2x - 4y + 6)dy = 0$

Verifica tus resultados en la sección de soluciones correspondiente